2024年度 慶應義塾大学 理工学部 数学

1

【解答】

（ア）	（イ）
92	4

【(2)の記述解答と(1)の解説】

(1)　$2024=2^3\cdot 11\cdot 23$ より，2024 の正の約数を小さいほうから順に 6 つ並べると，

$$1, 2, 4, 8, 11, 22$$

よって，大きいほうから 6 番目の約数は，

$$\frac{2024}{22}=92 \qquad \cdots（ア）$$

【2024 の 6 乗根は複素数の範囲で 6 つあり，以下では正の実数であるものを考える】

また，2024 の（正の）6 乗根に最も近い自然数について，

$$3.5^6=\left(\frac{49}{4}\right)^3<\left(\frac{25}{2}\right)^3=\frac{15625}{8}<\frac{16000}{8}=2000<2024\,,\quad 4^6=4096>2024$$

より，

$$3.5<\sqrt[6]{2024}<4$$

であるから，求める自然数は，

$$4 \qquad \cdots（イ）$$

(2)(i)　すべての自然数 n に対して

$$a_1 \leqq a_n \leqq 2 \qquad \cdots①$$

であることを，数学的帰納法により示す．

(I)　$n=1$ のとき，$a_1 \leqq 2$ より①が成り立つ．

(II)　$n=k$（k は自然数）のとき，①が成り立つ，すなわち

$$a_1 \leqq a_k \leqq 2 \qquad \cdots②$$

が成り立つと仮定する．関数 $f(x)$ は，$x \leqq 2$ において

$$\frac{2}{3}-\frac{1}{3}x \leqq f(x) \leqq 2-x \qquad \cdots③$$

を満たすことから，③に $x=a_k\,(\leqq 2)$ を代入して，

$$\frac{2}{3}-\frac{1}{3}a_k \leqq f(a_k) \leqq 2-a_k \qquad \cdots④$$

これを用いると，

$$a_{k+1}=a_k+f(a_k) \leqq a_k+(2-a_k)=2 \qquad (\because\ ④)$$

$$a_{k+1}-a_1=a_k+f(a_k)-a_1$$

$$\begin{aligned}
&\geqq a_k+\left(\frac{2}{3}-\frac{1}{3}a_k\right)-a_1 \quad (\because \ ④)\\
&=\frac{2}{3}a_k+\frac{2}{3}-a_1\\
&\geqq \frac{2}{3}a_1+\frac{2}{3}-a_1 \quad (\because \ ②)\\
&=\frac{1}{3}(2-a_1)\\
&\geqq 0 \quad (\because \ a_1\leqq 2)
\end{aligned}$$

であるから，

$$a_1\leqq a_{k+1}\leqq 2$$

である．

したがって，$n=k+1$のときも①は成り立つ．

(I)(II)より，$a_1\leqq 2$のとき，すべての自然数nに対して$a_1\leqq a_n\leqq 2$となる．　（証明終）

(ii)　$a_1\leqq 2$ならば，すべての自然数nに対し①が成り立つので，

$$\begin{aligned}
0&\leqq 2-a_{n+1}\\
&=2-\{a_n+f(a_n)\}\\
&\leqq 2-\left\{a_n+\left(\frac{2}{3}-\frac{1}{3}a_n\right)\right\}\\
&=\frac{2}{3}(2-a_n)
\end{aligned}$$

すなわち，

$$0\leqq 2-a_{n+1}\leqq\frac{2}{3}(2-a_n)$$

が成り立つので，この右側を繰り返し用いると，

$$0\leqq 2-a_n\leqq\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}(2-a_1)$$

を得る．

ここで，$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}(2-a_1)=0$であるから，はさみうちの原理より，

$$\lim_{n\to\infty}(2-a_n)=0$$

すなわち

$$\lim_{n\to\infty}a_n=2$$　（証明終）

となる．

2

【解答】

（ウ）	（エ）	（オ）	（カ）	（キ）
$\dfrac{5}{12}$	$\dfrac{3}{5}$	$\dfrac{8}{11}$	$\dfrac{1}{4}$	$\dfrac{1}{2}+\left(\dfrac{1}{2}\right)^n$

【解説】

(1)　袋の中から，タイプⅠ，Ⅱ，Ⅲのコインを取り出す事象をそれぞれA_1, A_2, A_3とすると，それらの事象が起こる確率は，それぞれ$\frac{1}{6}, \frac{2}{6}, \frac{3}{6}$である．コインを投げてHが出る事象を$B$とすると，$B=(A_1\cap B)\cup(A_2\cap B)\cup(A_3\cap B)$であり，

$$P(A_1\cap B)=\frac{1}{6}\cdot 1=\frac{1}{6}$$

$$P(A_2\cap B)=\frac{2}{6}\cdot 0=0$$

$$P(A_3\cap B)=\frac{3}{6}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$$

であるから，求める確率$P(B)$は，

$$\begin{aligned}P(B)&=P(A_1\cap B)+P(A_2\cap B)+P(A_3\cap B)\\&=\frac{1}{6}+0+\frac{1}{4}\\&=\frac{5}{12}\end{aligned}$$
…（ウ）

である．

(2)　求める条件付き確率$P_B(A_3)$は，

$$\begin{aligned}P_B(A_3)&=\frac{P(B\cap A_3)}{P(B)}\\&=\frac{\frac{1}{4}}{\frac{5}{12}}\\&=\frac{3}{5}\end{aligned}$$
…（エ）

である．

(3)　コインを2回投げて，2回ともTが出る事象をCとすると，
$C=(A_1\cap C)\cup(A_2\cap C)\cup(A_3\cap C)$であり，

$$P(A_1 \cap C) = \frac{1}{6} \cdot 0^2 = 0$$

$$P(A_2 \cap C) = \frac{2}{6} \cdot 1^2 = \frac{1}{3}$$

$$P(A_3 \cap C) = \frac{3}{6} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{8}$$

であるから，

$$\begin{aligned} P(C) &= P(A_1 \cap C) + P(A_2 \cap C) + P(A_3 \cap C) \\ &= 0 + \frac{1}{3} + \frac{1}{8} \\ &= \frac{11}{24} \end{aligned}$$

よって，求める条件付き確率 $P_C(A_2)$ は，

$$\begin{aligned} P_C(A_2) &= \frac{P(C \cap A_2)}{P(C)} \\ &= \frac{\frac{1}{3}}{\frac{11}{24}} \\ &= \frac{1}{3} \cdot \frac{24}{11} \\ &= \frac{8}{11} \end{aligned}$$ …（オ）

である

(4)　「コインのタイプが分かる」とは，H, T が両方とも出るということである．

よって，求める確率は，タイプⅢのコインを取り出し，かつ 2 回投げて H, T が 1 回ずつ出る確率であるから，

$$\frac{3}{6} \cdot \left({}_2\mathrm{C}_1 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}$$ …（カ）

である．

(5)　求める確率は，「タイプⅢのコインを取り出し，かつ n 回投げて H, T が少なくとも 1 回ずつ出る事象」の余事象の確率であるから，

$$1 - \frac{3}{6} \cdot \left\{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n \cdot 2\right\} = \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^n$$ …（キ）

である．

3

【解答】

（ク）	（ケ）	（コ）	（サ）	（シ）
$I-4a$	$\dfrac{f(t)}{t}$	$-t+\dfrac{5}{t}$	-2	$\dfrac{f\left(\sqrt{5}\right)}{\sqrt{5}}$

【(2)(4)の記述解答とその他の問題の解説】

(1)　$a \leqq \dfrac{f(3)}{3}$ のとき，$1 \leqq x \leqq 3$ において，

$$f(x)-ax \geqq f(3)-\frac{f(3)}{3}\cdot 3=0$$

であるから，

$$\begin{aligned} S &= \int_1^3 \left|f(x)-ax\right|dx \\ &= \int_1^3 \left\{f(x)-ax\right\}dx \\ &= \int_1^3 f(x)dx - a\int_1^3 x dx \\ &= I-4a \end{aligned}$$

…（ク）

である．

$a \geqq f(1)\,(>0)$ のとき，$1 \leqq x \leqq 3$ において，

$$f(x)-ax \leqq f(1)-f(1)\cdot 1=0$$

であるから，

$$\begin{aligned} S &= \int_1^3 \left|f(x)-ax\right|dx \\ &= \int_1^3 -\left\{f(x)-ax\right\}dx \\ &= -(I-4a) \end{aligned}$$

である．

(2)　$g(x)=f(x)-ax$ とおくと，$\dfrac{f(3)}{3}<a<f(1)$ により，

$$\begin{aligned} g(1) &= f(1)-a \\ &> f(1)-f(1)=0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g(3) &= f(3)-3a \\ &< f(3)-3\cdot\frac{f(3)}{3}=0 \end{aligned}$$

であり，$f(x)$ は連続関数より $g(x)$ も連続関数であるから，方程式 $g(x)=0$ は 1 と 3 の間に少なくとも 1 つ解をもつ．

次に，$\dfrac{f(3)}{3}<a<f(1)$ より a であるから，ax は単調に増加し，さらに $1\leqq x\leqq 3$ で $f(x)$ が単調に減少することより，$g(x)$ は $1\leqq x\leqq 3$ で単調に減少する．

よって，$1<x<3$ で方程式 $g(x)=0$，すなわち方程式 $f(x)-ax=0$ は解をただ 1 つもつ．

（証明終）

(3)　$\dfrac{f(3)}{3}<a<f(1)$ のもとで，$x=t$ は方程式 $f(x)-ax=0$ の解であるから，

$$f(t)-at=0 \qquad \therefore \quad a=\frac{f(t)}{t} \quad (\because \quad 1<t<3 \text{ より } t\neq 0) \qquad \cdots（ケ）$$

次に，(2)より

$1\leqq x\leqq t$ のとき，$|f(x)-ax|=f(x)-ax$

$t\leqq x\leqq 3$ のとき，$|f(x)-ax|=-\{f(x)-ax\}$

であるから，

$$\begin{aligned}
S&=\int_1^3|f(x)-ax|dx\\
&=\int_1^t\{f(x)-ax\}dx+\int_t^3-\{f(x)-ax\}dx\\
&=\int_1^t f(x)dx-\int_t^3 f(x)dx-a\int_1^t xdx+a\int_t^3 xdx\\
&=F(t)-\{F(3)-F(t)\}-a\cdot\frac{1}{2}(t^2-1)+a\cdot\frac{1}{2}(9-t^2)\\
&=2F(t)-F(3)-a(t^2-5)\\
&=2F(t)-F(3)-(t^2-5)\cdot\frac{f(t)}{t}\\
&=2F(t)-F(3)+\frac{5-t^2}{t}\cdot f(t)
\end{aligned}$$

のように S は関数 $F(x)$ と分数式

$$q(t)=\frac{5-t^2}{t} \qquad \cdots（コ）$$

を用いて表される．

(4)

$$F(x)-F(t_0)-(x-t_0)f(x)=\int_{t_0}^x\{f(s)-f(x)\}ds \qquad \cdots①$$

であり，$1\leqq x\leqq 3$，$1<t_0<3$ に注意すると，

(i)　$x=t_0$ のとき，①の値は 0 である．

(ii)　$t_0<x$ のとき，

$f(s)$ は $t_0\leqq s\leqq x$ で単調に減少するから，この区間で $f(s)-f(x)\geqq 0$ である．よって，

$$\int_{t_0}^{x}\{f(s)-f(x)\}ds>0 \quad (\because \quad t_0<x)$$

である．

(iii)　$x<t_0$ のとき，

$f(s)$ は $x \leqq s \leqq t_0$ で単調に減少するから，この区間で $f(s)-f(x) \leqq 0$ である．よって，

$$\int_{t_0}^{x}\{f(s)-f(x)\}ds>0 \quad (\because \quad t_0>x)$$

である．

(i)～(iii)より，$1 \leqq x \leqq 3$ を満たすすべての実数 x に対し，

$$\int_{t_0}^{x}\{f(s)-f(x)\}ds \geqq 0$$

が成り立つ（等号は，$x=t_0$ のときに限り成立する）．よって，①より，

$$F(x)-F(t_0)-(x-t_0)f(x) \geqq 0$$

すなわち，

$$F(x)-F(t_0) \geqq (x-t_0)f(x)$$

が成り立つ（これも等号は，$x=t_0$ のときに限り成立する）．

（証明終）

(5)

$$h(x)=2(x-t_0)f(x)+p(x)f(x)$$
$$=\{2(x-t_0)+p(x)\}f(x)$$

とおく．$r(x)=2(x-t_0)+p(x)$ とおくと，$f(x)>0$ であるから，$1 \leqq x \leqq 3$ を満たすすべての実数 x に対し，$h(x) \geqq 0$ が成り立つことは，

$1 \leqq x \leqq 3$ を満たすすべての実数 x に対し，$r(x) \geqq 0$ が成り立つ　…（＊）

ことに他ならない．ここで，

$$r(t_0)=p(t_0)=0$$

であり，

$$r'(x)=2+p'(x)$$
$$r''(x)=p''(x)>0$$

より，$r'(x)$ は単調に増加するから，

$$r'(t_0)=0$$

ならば，（＊）が成り立つ．すなわち，

$$2+p'(t_0)=0$$

つまり，

$$p'(t_0)=-2 \qquad \cdots（サ）$$

ならば，（＊）が成り立つ．

(6) (1)より，$a \leqq \dfrac{f(3)}{3}$ のとき，S は a の単調減少関数，$a \geqq f(1)$ のとき，S は a の単調増加関数であるから，S の最小は $\dfrac{f(3)}{3} \leqq a \leqq f(1)$ において起こる．

$\dfrac{f(3)}{3} \leqq a \leqq f(1)$ のとき，$a = \dfrac{f(t)}{t}$ は t について単調に減少するから，t は $1 \leqq t \leqq 3$ の範囲を変化する．また，(3)で求めた $q(t) = \dfrac{5-t^2}{t} = -t + \dfrac{5}{t}$ について，

$$q'(t) = -1 - \frac{5}{t^2}$$

$$q''(t) = \frac{10}{t^3} > 0 \quad (\because \quad 1 \leqq t \leqq 3)$$

で，$t = \sqrt{5}$ のとき

$$q\left(\sqrt{5}\right) = -\sqrt{5} + \sqrt{5} = 0, \quad q'\left(\sqrt{5}\right) = -1 - 1 = -2$$

である．よって，(5)の不等式で，$p(x)$ を $q(x)$，$t_0 = \sqrt{5}$ とおくことにより，

$$2\left(x - \sqrt{5}\right)f(x) + q(x)f(x) \geqq 0 \qquad \cdots②$$

が成り立つ（等号成立は $x = \sqrt{5}$ のときに限られる）．さらに(4)で示したことより，

$$F(x) - F\left(\sqrt{5}\right) \geqq \left(x - \sqrt{5}\right)f(x) \qquad \cdots③$$

が成り立つ（等号成立は $x = \sqrt{5}$ のときに限られる）．②，③を用いると，$1 \leqq t \leqq 3$ において，

$$\begin{aligned} S &= 2\left\{F(t) - F\left(\sqrt{5}\right)\right\} + 2F\left(\sqrt{5}\right) - F(3) + q(t)\cdot f(t) \\ &\geqq 2\left(t - \sqrt{5}\right)f(t) + 2F\left(\sqrt{5}\right) - F(3) + q(t)\cdot f(t) \\ &\geqq 2F\left(\sqrt{5}\right) - F(3) \end{aligned}$$

であり，2 つの不等号の等号はいずれも，$t = \sqrt{5}$ のときに限り成立するから，S が最小となる t の値は $t = \sqrt{5}$ である．

　したがって，

$$a = \frac{f\left(\sqrt{5}\right)}{\sqrt{5}} \qquad \cdots（答）$$

のとき S は最小となる．

4

【解答】

（ス）	（セ）	（ソ）	（タ）	（チ）	（ツ）	（テ）
$\dfrac{\sqrt{3}}{2}$	$-\dfrac{4}{3}$	$\dfrac{1}{3}$	$\dfrac{\sqrt{2}}{3}$	-1	$\dfrac{1}{2}\sqrt{2t^2-2t+1}$	$\dfrac{1}{3}$

【解説】

(1)　三角形OABの面積は，

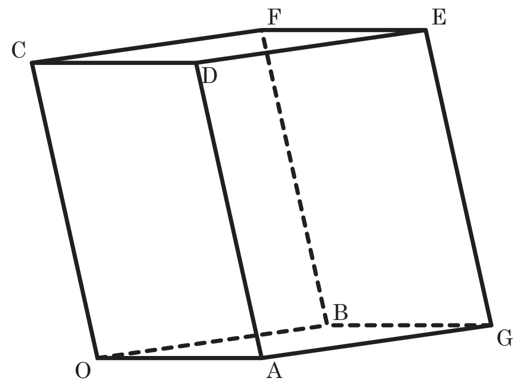
$$\frac{1}{2}\sqrt{\left|\vec{a}\right|^2\left|\vec{b}\right|^2-\left(\vec{a}\cdot\vec{b}\right)^2}=\frac{1}{2}\sqrt{1^2\cdot 2^2-1^2}$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{2} \qquad \cdots（ス）$$

実数 x, y を用いて，　$\overrightarrow{\mathrm{CH}}=x\vec{a}+y\vec{b}-\vec{c}$ とおく．このとき $\overrightarrow{\mathrm{OH}}=x\vec{a}+y\vec{b}$ である．

$$\mathrm{CH}\perp \text{平面}\,\mathrm{OAB} \quad\Leftrightarrow\quad \overrightarrow{\mathrm{CH}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}}=0 \quad \text{かつ} \quad \overrightarrow{\mathrm{CH}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}=0$$

であり，



$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{CH}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}}&=\left(x\vec{a}+y\vec{b}-\vec{c}\right)\cdot\vec{a}\\&=x\left|\vec{a}\right|^2+y\vec{a}\cdot\vec{b}-\vec{a}\cdot\vec{c}\\&=x\cdot1^2+y\cdot1-(-1)\\&=x+y+1\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{CH}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}&=\left(x\vec{a}+y\vec{b}-\vec{c}\right)\cdot\vec{b}\\&=x\vec{a}\cdot\vec{b}+y\left|\vec{b}\right|^2-\vec{b}\cdot\vec{c}\\&=x\cdot1+y\cdot2^2-0\\&=x+4y\end{aligned}$$

がともに0に等しいので

$$\begin{cases}x+y+1=0\\x+4y=0\end{cases}$$

これを解いて，

$$x=-\frac{4}{3},\quad y=\frac{1}{3} \qquad \cdots（セ）（ソ）$$

$\overrightarrow{\mathrm{OH}}=-\dfrac{4}{3}\vec{a}+\dfrac{1}{3}\vec{b}$ であるから，

$$\left|\overrightarrow{\mathrm{OH}}\right|^2=\left|-\frac{4}{3}\vec{a}+\frac{1}{3}\vec{b}\right|^2$$
$$=\frac{16}{9}\left|\vec{a}\right|^2-\frac{8}{9}\vec{a}\cdot\vec{b}+\frac{1}{9}\left|\vec{b}\right|^2$$
$$=\frac{16}{9}\cdot1^2-\frac{8}{9}\cdot1+\frac{1}{9}\cdot2^2$$
$$=\frac{4}{3}$$

$$\therefore\quad \mathrm{CH}=\sqrt{\mathrm{OC}^2-\mathrm{OH}^2}$$
$$=\sqrt{2^2-\frac{4}{3}}$$
$$=\frac{2\sqrt{6}}{3}$$

したがって，四面体OABCの体積は，

$$\frac{1}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{2\sqrt{6}}{3}=\frac{\sqrt{2}}{3}$$ …（タ）

(2)　$\overrightarrow{\mathrm{OI}}=t\vec{a},\ \overrightarrow{\mathrm{OJ}}=\frac{1}{2}\vec{b},\ \overrightarrow{\mathrm{OK}}=\vec{b}+\frac{1}{2}\vec{c}$ より，

$$\overrightarrow{\mathrm{JI}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{JK}}=\left(\overrightarrow{\mathrm{OI}}-\overrightarrow{\mathrm{OJ}}\right)\cdot\left(\overrightarrow{\mathrm{OK}}-\overrightarrow{\mathrm{OJ}}\right)$$
$$=\left(t\vec{a}-\frac{1}{2}\vec{b}\right)\cdot\left(\frac{1}{2}\vec{b}+\frac{1}{2}\vec{c}\right)$$
$$=\frac{1}{2}t\vec{a}\cdot\vec{b}+\frac{1}{2}t\vec{a}\cdot\vec{c}-\frac{1}{4}\left|\vec{b}\right|^2-\frac{1}{4}\vec{b}\cdot\vec{c}$$
$$=\frac{1}{2}t\cdot1+\frac{1}{2}t\cdot(-1)-\frac{1}{4}\cdot2^2-\frac{1}{4}\cdot0$$
$$=-1$$ …（チ）

$$\left|\overrightarrow{\mathrm{JI}}\right|^2=\left|t\vec{a}-\frac{1}{2}\vec{b}\right|^2$$
$$=t^2\left|\vec{a}\right|^2-t\vec{a}\cdot\vec{b}+\frac{1}{4}\left|\vec{b}\right|^2$$
$$=t^2\cdot1^2-t\cdot1+\frac{1}{4}\cdot2^2$$
$$=t^2-t+1$$

$$\left|\overrightarrow{\mathrm{JK}}\right|^2=\left|\frac{1}{2}\vec{b}+\frac{1}{2}\vec{c}\right|^2$$
$$=\frac{1}{4}\left|\vec{b}\right|^2+\frac{1}{2}\vec{b}\cdot\vec{c}+\frac{1}{4}\left|\vec{c}\right|^2$$
$$=\frac{1}{4}\cdot2^2+\frac{1}{2}\cdot0+\frac{1}{4}\cdot2^2$$
$$=2$$

よって，三角形IJKの面積は，

$$\frac{1}{2}\sqrt{\left|\overrightarrow{\mathrm{JI}}\right|^2\left|\overrightarrow{\mathrm{JK}}\right|^2-\left(\overrightarrow{\mathrm{JI}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{JK}}\right)^2}=\frac{1}{2}\sqrt{\left(t^2-t+1\right)\cdot 2-(-1)^2}$$

$$=\frac{1}{2}\sqrt{2t^2-2t+1} \qquad \cdots（ツ）$$

(3)　直線DEと平面IJKの交点をLとすると，実数p, q, rを用いて，

$$\overrightarrow{\mathrm{OL}}=p\overrightarrow{\mathrm{OI}}+q\overrightarrow{\mathrm{OJ}}+r\overrightarrow{\mathrm{OK}}$$

$$=p\cdot t\vec{a}+q\cdot\frac{1}{2}\vec{b}+r\cdot\left(\vec{b}+\frac{1}{2}\vec{c}\right)$$

$$=pt\vec{a}+\left(\frac{1}{2}q+r\right)\vec{b}+\frac{1}{2}r\vec{c} \qquad \cdots①$$

$$p+q+r=1 \qquad \cdots②$$

が成り立つ．Lが辺DE上にあるのは，①より，

$$pt=1 \quad すなわち \quad p=\frac{1}{t}\ （\because \quad 0<t<1） \qquad \cdots③$$

$$\frac{1}{2}r=1 \quad すなわち \quad r=2 \qquad \cdots④$$

$$0\leqq\frac{1}{2}q+r\leqq 1 \qquad \cdots⑤$$

が全て成り立つときである．②，③，④より，

$$\frac{1}{t}+q+2=1$$

$$\therefore \quad q=-1-\frac{1}{t} \qquad \cdots⑥$$

④，⑥を⑤に代入して，

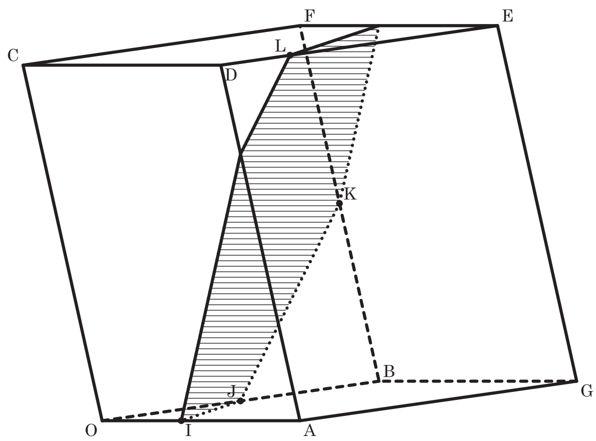
$$0\leqq\frac{1}{2}\left(-1-\frac{1}{t}\right)+2\leqq 1$$

$$\therefore \quad 1\leqq\frac{1}{t}\leqq 3$$

$$\therefore \quad \frac{1}{3}\leqq t\leqq 1$$

これと$0<t<1$より，

$$\frac{1}{3}\leqq t<1 \qquad \cdots（テ）$$



5

【解答】

（ト）	（ナ）	（ニ）	（ヌ）	（ネ）
$2\pi r$	$(1-r)(\cos t+i\sin t)$	$r\left(\cos\dfrac{r-1}{r}t+i\sin\dfrac{r-1}{r}t\right)$	$8r(1-r)$	$\dfrac{4(1-r)}{\pi}$

【解説】

(1)　時刻 t において，複素数 1 に対応する点を A，複素数 $w(t)$ に対応する点を O_t，複素数 $z(t)$ に対応する点を P_t，複素数 $\cos t+i\sin t$ に対応する点を Q_t とする．このとき，

（弧 AQ_t の長さ）＝（弧 $\mathrm{P}_t\mathrm{Q}_t$ の長さ）　…①

であるから，$\overrightarrow{\mathrm{O}_t\mathrm{Q}_t}$ から $\overrightarrow{\mathrm{O}_t\mathrm{P}_t}$ まで時計回りに測った角を θ とすると，

$$1\cdot t=r\theta \qquad \therefore \quad \theta=\frac{t}{r} \qquad \cdots②$$

n を自然数とする．$t>0$ において，n 回目に P_t が C_1 上に位置する，すなわち $\theta=2\pi n$ となるのは，②より

$$t=2\pi nr$$

のときである．よって，その中で最小のものは，$n=1$ として，

$$t=2\pi r \qquad \cdots（ト）$$

である．

(2)　$\overrightarrow{\mathrm{OO}_t}=(1-r)\overrightarrow{\mathrm{OQ}_t}$ であるから，

$$w(t)=(1-r)(\cos t+i\sin t) \qquad \cdots（ナ）$$

また，$\overrightarrow{\mathrm{O}_t\mathrm{P}_t}$ は，$\overrightarrow{\mathrm{O}_t\mathrm{Q}_t}$ を角 $-\theta$ だけ回転させたものであるから，

$$\overrightarrow{\mathrm{OQ}_t}=\overrightarrow{\mathrm{OO}_t}+\overrightarrow{\mathrm{O}_t\mathrm{Q}_t}=\overrightarrow{\mathrm{OO}_t}+r\overrightarrow{\mathrm{O}_t\mathrm{Q}_t}$$

$$\therefore \quad z(t)=w(t)+r\left\{\cos\left(t-\frac{t}{r}\right)+i\sin\left(t-\frac{t}{r}\right)\right\}$$

$$=w(t)+r\left(\cos\frac{r-1}{r}t+i\sin\frac{r-1}{r}t\right) \qquad \cdots（ニ）$$

である．

(3)　(2)より，

$$z(t)=(1-r)(\cos t+i\sin t)+r\left(\cos\frac{r-1}{r}t+i\sin\frac{r-1}{r}t\right)$$

$$=(1-r)\cos t+r\cos\frac{r-1}{r}t+i\left\{(1-r)\sin t+r\sin\frac{r-1}{r}t\right\}$$

であるから，$z(t)=x(t)+iy(t)$ とおくと，

$$x(t)=(1-r)\cos t+r\cos\frac{r-1}{r}t$$
$$y(t)=(1-r)\sin t+r\sin\frac{r-1}{r}t$$

とおくと，時刻 0 から時刻 $2\pi r$ の間に P が動く道のりは，

$$\int_0^{2\pi r}\sqrt{\{x'(t)\}^2+\{y'(t)\}^2}\,dt$$
$$=\int_0^{2\pi r}\sqrt{\left\{-(1-r)\sin t-(r-1)\sin\frac{r-1}{r}t\right\}^2+\left\{(1-r)\cos t+(r-1)\cos\frac{r-1}{r}t\right\}^2}\,dt$$
$$=(1-r)\int_0^{2\pi r}\sqrt{\left\{\sin t-\sin\frac{r-1}{r}t\right\}^2+\left\{\cos t-\cos\frac{r-1}{r}t\right\}^2}\,dt\quad(\because\quad 0<t<1)$$
$$=(1-r)\int_0^{2\pi r}\sqrt{2-2\left(\cos t\cos\frac{r-1}{r}t+\sin t\sin\frac{r-1}{r}t\right)}\,dt$$
$$=(1-r)\int_0^{2\pi r}\sqrt{2-2\cos\frac{t}{r}}\,dt$$
$$=2(1-r)\int_0^{2\pi r}\left|\sin\frac{t}{2r}\right|dt$$
$$=2(1-r)\int_0^{2\pi r}\sin\frac{t}{2r}\,dt$$
$$=-4r(1-r)\left[\cos\frac{t}{2r}\right]_0^{2\pi r}$$
$$=8r(1-r)\qquad\cdots（ヌ）$$

である．

(4)　$t>0$ に対し，

$$2\pi nr\leqq t<2\pi(n+1)r\qquad\cdots③$$

をみたす自然数 n がただ一つ存在し，これを用いると

$$8n\cdot r(1-r)\leqq l(t)<8(n+1)\cdot r(1-r)\qquad\cdots④$$

である．よって，③，④より，

$$\frac{8n\cdot r(1-r)}{2\pi(n+1)r}<\frac{l(t)}{t}<\frac{8(n+1)\cdot r(1-r)}{2\pi nr}$$
$$\therefore\quad\frac{4(1-r)}{\pi}\cdot\frac{n}{n+1}<\frac{l(t)}{t}<\frac{4(1-r)}{\pi}\cdot\frac{n+1}{n}\qquad\cdots⑤$$

一方，③より，

$$n>\frac{t}{2\pi}-1$$

であるから，$t\to\infty$ のとき $n\to\infty$ であり，

$$\lim_{n\to\infty}\frac{4(1-r)}{\pi}\cdot\frac{n}{n+1}=\frac{4(1-r)}{\pi}$$
$$\lim_{n\to\infty}\frac{4(1-r)}{\pi}\cdot\frac{n+1}{n}=\frac{4(1-r)}{\pi}$$

したがって，⑤とはさみうちの原理より，

$$\lim_{t\to\infty}\frac{l(t)}{t}=\frac{4(1-r)}{\pi} \qquad \cdots（ネ）$$

である．