2024年度 慶應義塾大学 経済学部 数学

[マークの解答]

[1]

(1)

$\boxed{(1)(2)}$	$\boxed{(3)(4)}$	$\boxed{(5)}$	$\boxed{(6)(7)}$
-8	-2	6	13

(2)

$\dfrac{\boxed{(8)}}{\boxed{(9)}}$	$\dfrac{\boxed{(10)}}{\boxed{(11)}}$	$\dfrac{\boxed{(12)}}{\boxed{(13)}}$	$\boxed{(14)}$	$\dfrac{\boxed{(15)}}{\boxed{(16)}}$	$\dfrac{\boxed{(17)}}{\boxed{(18)}}$	$\dfrac{\pi}{\boxed{(19)}}$	$\dfrac{\boxed{(20)(21)}}{\boxed{(22)}}$	$\dfrac{\boxed{(23)}}{\boxed{(24)}}$
$\dfrac{1}{2}$	$\dfrac{1}{2}$	$\dfrac{5}{2}$	3	$\dfrac{3}{5}$	$\dfrac{4}{5}$	$\dfrac{\pi}{4}$	$\dfrac{11}{2}$	$\dfrac{3}{2}$

[2]

$\dfrac{\boxed{(25)}}{\boxed{(26)}}$	$\dfrac{\boxed{(27)(28)}}{\boxed{(29)(30)}}$	$\dfrac{\boxed{(31)(32)}}{\boxed{(33)(34)}}$	$\dfrac{\boxed{(35)(36)}}{\boxed{(37)(38)(39)}}$
$\dfrac{7}{9}$	$\dfrac{11}{18}$	$\dfrac{13}{72}$	$\dfrac{20}{273}$

[3]

$\boxed{(40)}\left(A^3-\dfrac{1}{A^3}\right)-\boxed{(41)}\left(A-\dfrac{1}{A}\right)$	$\dfrac{\boxed{(42)}}{\boxed{(43)}}$	$\dfrac{\boxed{(44)}}{\boxed{(45)}}$	$A^2-\boxed{(46)}bA-\boxed{(47)}=0$
$1\left(A^3-\dfrac{1}{A^3}\right)-3\left(A-\dfrac{1}{A}\right)$	$\dfrac{1}{4}$	$\dfrac{3}{4}$	$A^2-2bA-1=0$

$\boxed{(48)}b+\sqrt{b^2+\boxed{(49)}}$	$\boxed{(50)}a_{n+1}$	$\dfrac{a_1}{\boxed{(51)}^{n-p}}$	$p=\boxed{(52)}$	$\dfrac{\boxed{(53)}}{\boxed{(54)}}$	$\dfrac{\boxed{(55)}^n}{\boxed{(56)}}$
$1b+\sqrt{b^2+1}$	$3a_{n+1}$	$\dfrac{a_1}{3^{n-p}}$	$p=1$	$\dfrac{3}{4}$	$\dfrac{3^n}{4}$

$\boxed{(57)(58)(59)}\log_2\boxed{(60)}$
$-81\log_2 3$

[1]

(1)

$$x^2-(p-9)x-p+1=0 \qquad \cdots\cdots Ⓐ$$

Ⓐの解と係数の関係より

$$\begin{cases} m+n=p-9 & \cdots\cdots ① \\ \quad mn=-p+1 & \cdots\cdots ② \end{cases}$$

が成り立ち，①②より

$$mn+m+n=-8$$

$$(m+1)(m+1)=-7$$

と表せる。

$m<0<n$ より $m+1<1<n+1$ なので

$$(m+1,n+1)=(-1,7)$$

$$(m,n)=(-2,6)$$

であり，②を用いて

$$\begin{aligned} p&=1-mn \\ &=13 \end{aligned}$$

と求められる。

(2)

$$\begin{aligned} \frac{x}{x^2+1}&=x\cdot\frac{1}{x^2+1} \\ &=\tan\theta\cdot\frac{1}{\tan^2\theta+1} \\ &=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}\cdot\cos^2\theta \\ &=\sin\theta\cos\theta \\ &=\frac{1}{2}\sin 2\theta \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{x^2+1}&=\frac{1}{\tan^2\theta+1} \\ &=\cos^2\theta \\ &=\frac{1}{2}(\cos 2\theta+1) \end{aligned}$$

であるから，

$$\begin{aligned} y&=\frac{x^2+3x+5}{x^2+1} \\ &=\frac{(x^2+1)+3x+4}{x^2+1} \\ &=1+3\cdot\frac{x}{x^2+1}+4\cdot\frac{1}{x^2+1} \\ &=1+3\cdot\frac{1}{2}\sin 2\theta+4\cdot\frac{1}{2}(\cos 2\theta+1) \\ &=\frac{3}{2}\sin 2\theta+2\cos 2\theta+3 \\ &=\frac{5}{2}\sin(2\theta+\alpha)+3 \end{aligned}$$

$$\left(\cos\alpha=\frac{3}{5},\ \sin\alpha=\frac{4}{5}\right)$$

と表せる。

$|\theta| < \dfrac{\pi}{2}$ より

$$|x| \leqq 1 \Longleftrightarrow |\tan\theta| \leqq 1 \Longleftrightarrow |\theta| \leqq \frac{\pi}{4}$$

であるから,

$$-\frac{\pi}{2}+\alpha \leqq 2\theta+\alpha \leqq \frac{\pi}{2}+\alpha$$

$$-\frac{3}{5} \leqq \sin(2\theta+\alpha) \leqq 1$$

$$\frac{3}{2} \leqq y \leqq \frac{11}{2}$$

と求められる。

[2]

問題文より，それぞれの試行において A, B, C がカードを引く確率はそれぞれ $\frac{1}{6}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}$ である。

(1)

1 回目の試行後，B の点数が 3 の倍数となるのは

a) B がカードを引いて，かつ 3, 6, 9 のいずれかのカードを引く（3, 6, 9 点のいずれかとなる）

b) B 以外がカードを引く（0 点となる）

のいずれかのときである。

a) の確率は　$\frac{1}{3} \times \frac{3}{9} = \frac{1}{9}$

b) の確率は　$1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$

であるから，求める確率は

$$\frac{1}{9} + \frac{2}{3} = \frac{7}{9}$$

である。

(2)

2 回目の試行後に 1 人だけの点数が 0 となるのは，2 回の試行のうち 1 回目にカードを引いた人と 2 回目にカードを引いた人が異なるときである。

よって，求める確率は

$$\frac{1}{6} \times \left(1 - \frac{1}{6}\right) + \frac{1}{3} \times \left(1 - \frac{1}{3}\right) + \frac{1}{2} \times \left(1 - \frac{1}{2}\right) = \frac{11}{18}$$

である。

(3)

1 回目と 2 回目にカードを引く人で場合分けをする。

a) 2 回とも A が引くとき

2 回とも A が引く確率は

$$\left(\frac{1}{6}\right)^2 = \frac{1}{36}$$

である。

このとき，A の点数が 5 未満となるのは，2 回の番号の和が 5 未満のときである。

2 回の番号の和が 5 未満となる番号の組は $\{1, 2\}, \{1, 3\}$ のみであることから，2 回とも A が引いたときに A の点数が 5 未満となる条件付き確率は

$$\frac{{}_2\mathrm{P}_2}{{}_9\mathrm{P}_2} \times 2 = \frac{1}{18}$$

であり，2 回とも A が引いたときに A の点数が 5 以上となる条件付き確率は

$$1 - \frac{1}{18} = \frac{17}{18}$$

である。

b) 1 回目に A，2 回目に A 以外が引くとき

この順に引く確率は

$$\frac{1}{6} \times \left(1 - \frac{1}{6}\right) = \frac{5}{36}$$

である。

この順に引いたとき, A の点数が 5 以上となるのは, A が 5 以上のカードを引くときである。

よって，この順に引いて A の点数が 5 以上となる条件付き確率は $\frac{5}{9}$ である。

c) 1 回目に A 以外，2 回目に A が引くとき

この順に引く確率は

$$\left(1-\frac{1}{6}\right)\times\frac{1}{6}=\frac{5}{36}$$

である。

この順に引いたとき, A の点数が 5 以上となるのは, A が 5 以上のカードを引くときである。

1 回目に 4 以下のカードが引かれたとき，2 回目に引くときには 5 以上のカードが 5 枚

1 回目に 5 以上のカードが引かれたとき，2 回目に引くときには 5 以上のカードが 4 枚

残っていることに注意すると，この順に引いて A の点数が 5 以上となる条件付き確率は

$$\frac{4}{9}\times\frac{5}{8}+\frac{5}{9}\times\frac{4}{8}=\frac{5}{9}$$

である。

a) b) c) より，求める確率は

$$\frac{1}{36}\times\frac{17}{18}+\frac{5}{36}\times\frac{5}{9}+\frac{5}{36}\times\frac{5}{9}=\frac{13}{72}$$

である。

(4)

2 回目の試行後の A の点数が 5 以上であり，かつ 3 回目の試行後の 3 人の点数がすべて 5 以上となる確率 p を考える。

このようになるのは,

3 回の試行で異なる 3 人がカードを引き，かつ 2 回目までに A がカードを引く

ときである。このような引き方となる確率は,

$$\left(\frac{1}{6}\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\right)\times({}_3\mathrm{P}_3-{}_2\mathrm{P}_2)=\frac{1}{9}$$

である。

また，このような引き方をしたとき，A, B, C の点数がすべて 5 以上となる，すなわち 3 人とも 5 以上のカードを引く条件付き確率は

$$\frac{{}_5\mathrm{P}_3}{{}_9\mathrm{P}_3}=\frac{5}{42}$$

である。よって,

$$p=\frac{1}{9}\times\frac{5}{42}$$
$$=\frac{5}{378}$$

であり，求める条件付き確率は (3) の結果より

$$\frac{\frac{5}{378}}{\frac{13}{72}}=\frac{20}{273}$$

である。

[3]

(1)

$$\left(A-\frac{1}{A}\right)^3=A^3-3A+\frac{3}{A}-\frac{1}{A^3}$$
$$=\left(A^3-\frac{1}{A^3}\right)-3\left(A-\frac{1}{A}\right)$$

であり，

$$A-\frac{1}{A}=2^a-\frac{1}{2^a}$$
$$=2f(a)$$
$$A^3-\frac{1}{A^3}=2^{3a}-\frac{1}{2^{3a}}$$
$$=2f(3a)$$

を用いると

$$\{2f(a)\}^3=2f(3a)-3\cdot 2f(a)$$
$$\{f(a)\}^3=\frac{1}{4}f(3a)-\frac{3}{4}f(a) \quad \cdots\cdots①$$

と表せる。

(2)

$f(a)=b$ より

$$\frac{1}{2}(2^a-2^{-a})=b$$
$$A-\frac{1}{A}=2b$$
$$A^2-2bA-1=0$$
$$A=b\pm\sqrt{b^2+1}$$

であり，$A=2^a>0$ より

$$A=b+\sqrt{b^2+1}$$

と求められる。

すなわち，

$$2^a=b+\sqrt{b^2+1}$$
$$a=\log_2\left(b+\sqrt{b^2+1}\right) \quad \cdots\cdots②$$

と表せる。

(3)

$$4{b_{n+1}}^3+3b_{n+1}-b_n=0 \quad \cdots\cdots③$$

③より

$$4\{f(a_{n+1})\}^3+3f(a_{n+1})-f(a_n)=0$$

であり，①を用いて

$$\{f(3a_{n+1})-3f(a_{n+1})\}+3f(a_{n+1})-f(a_n)=0$$
$$f(3a_{n+1})=f(a_n)$$

と表せる。

(2) の結果より，実数 α, β に対して

$$f(\alpha)=f(\beta)\Longleftrightarrow\alpha=\beta$$

が成り立つといえるので，

$$3a_{n+1}=a_n$$
$$a_{n+1}=\frac{1}{3}a_n$$

と表せて，$\{a_n\}$は公比$\frac{1}{3}$の等比数列であることがわかる。

したがって，

$$a_n=a_1\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$$
$$=\frac{a_1}{3^{n-1}}$$

である。

(4)

$c_n=3^n b_n$ とおくと，

$c_{n+1}=3^{n+1}b_{n+1}$ であるから，

$$c_{n+1}-c_n=3^n(3b_{n+1}-b_n)$$

である。

③より

$$3b_{n+1}-b_n=-4b_{n+1}{}^3$$

であるから，

$$c_{n+1}-c_n=3^n\cdot(-4b_{n+1}{}^3)$$

と表せる。

よって，$n\geqq 2$ のとき

$$c_n-c_{n-1}=3^{n-1}\cdot(-4b_n^3)$$
$$3^{n-1}b_n^3=-\frac{1}{4}(c_n-c_{n-1})$$

であり，

$$S_n=\sum_{k=2}^{n}\left(-\frac{1}{4}\right)(c_k-c_{k-1})$$
$$=-\frac{1}{4}(c_n-c_1)$$
$$=\frac{3}{4}b_1-\frac{3^n}{4}b_n$$

となる。

よって，$b_1=\frac{4}{3}S_5-108$ のとき

$$\frac{4}{3}\left(\frac{3}{4}b_1-\frac{3^5}{4}b_5\right)-108=b_1$$
$$b_5=-\frac{4}{3}$$

であり，

$$a_5=\log_2\left(-\frac{4}{3}+\sqrt{\left(\frac{4}{3}\right)^2+1}\right)$$
$$=-\log_2 3$$
$$\frac{a_1}{3^4}=-\log_2 3$$
$$a_1=-81\log_2 3$$

と求められる。

[4]

(1)

$\mathrm{AC}=2\sqrt{3}$ より

$(p-3)^2+3+q^2=12$

$p^2+q^2-6p=0$

$\mathrm{OC}=2\sqrt{3}$ より

$p^2+q^2=12$

$q>0$ のもとでこれらを解いて，

$(p,q)=\left(2,2\sqrt{2}\right)$

が得られる。

(2)

線分 OD, AE, BF, CG の中点がすべて $\left(\dfrac{3}{2},0,\dfrac{q}{2}\right)$，すなわち $\left(\dfrac{3}{2},0,\sqrt{2}\right)$ であることから，

$\mathrm{D}\left(3,0,2\sqrt{2}\right), \mathrm{E}\left(0,\sqrt{3},2\sqrt{2}\right), \mathrm{F}\left(0,-\sqrt{3},2\sqrt{2}\right), \mathrm{G}(1,0,0)$

であることがわかる。

よって，直線 DG は xz 平面上にある。

直線 AB と xz 平面との交点を M とすると

$\mathrm{M}(3,0,0)$

であり，平面 ABC と xz 平面との交線は直線 CM である。

すなわち，直線 DG と平面 ABC の交点 H は，直線 DG と直線 CM との交点である。

$\mathrm{CD} \parallel \mathrm{DG},\ \mathrm{DG}=2\mathrm{CD}$

であるから，H は線分 DG を 1:2 に内分する点であり，

$\mathrm{H}\left(\dfrac{7}{3},0,\dfrac{4}{3}\sqrt{2}\right)$

と求められる。

(3)

I は直線 CB 上の点なので，

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{GI}}&=\overrightarrow{\mathrm{GB}}+k\,\overrightarrow{\mathrm{BC}}\\&=\left(2,\sqrt{3},0\right)+k\left(-1,-\sqrt{3},2\sqrt{2}\right)\\&=\left(2-k,\ \sqrt{3}(1-k),\ 2\sqrt{2}\,k\right) \qquad \cdots\cdots①\end{aligned}$$

と表せる（k は実数）。

また，I は平面 DEG 上の点なので，

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{GI}}&=s\overrightarrow{\mathrm{GD}}+t\overrightarrow{\mathrm{GE}}\\&=\left(2s-t,\ \sqrt{3}\,t,\ 2\sqrt{2}(s+t)\right) \qquad \cdots\cdots②\end{aligned}$$

と表せる（s, t は実数）。

①②より

$$\begin{cases}2-k=2s-t\\ \sqrt{3}(1-k)=\sqrt{3}\,t\\ 2\sqrt{2}\,k=2\sqrt{2}(s+t)\end{cases}$$

であり，これを解くと

$$(k, s, t)=\left(\frac{5}{6}, \frac{2}{3}, \frac{1}{6}\right)$$

が得られる。

すなわち，①より

$$\overrightarrow{\mathrm{GI}}=\left(\frac{7}{6}, \frac{\sqrt{3}}{6}, \frac{5}{3}\sqrt{2}\right)$$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OI}}&=\overrightarrow{\mathrm{OG}}+\overrightarrow{\mathrm{GI}}\\&=\left(\frac{13}{6}, \frac{\sqrt{3}}{6}, \frac{5}{3}\sqrt{2}\right)\end{aligned}$$

であり，

$$\mathrm{I}\left(\frac{13}{6}, \frac{\sqrt{3}}{6}, \frac{5}{3}\sqrt{2}\right)$$

である。

また，題意より F, J は xz 平面に関してそれぞれ E, I と対称な点であり，

$$\mathrm{J}\left(\frac{13}{6}, -\frac{\sqrt{3}}{6}, \frac{5}{3}\sqrt{2}\right)$$

である。

よって，

$$\overrightarrow{\mathrm{CH}}=\left(\frac{1}{3}, 0, -\frac{2}{3}\sqrt{2}\right),\ \overrightarrow{\mathrm{JI}}=\left(0, \frac{\sqrt{3}}{3}, 0\right)$$

であり，

$$\overrightarrow{\mathrm{CH}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{JI}}=0,\ \overrightarrow{\mathrm{CH}}\neq\vec{0},\ \overrightarrow{\mathrm{JI}}\neq\vec{0}$$

が成り立つ。

したがって，$\overrightarrow{\mathrm{CH}}\perp\overrightarrow{\mathrm{JI}}$ であり，四角形 CJHI の面積は

$$\begin{aligned}S&=\frac{1}{2}\cdot|\overrightarrow{\mathrm{CH}}|\cdot|\overrightarrow{\mathrm{JI}}|\\&=\frac{1}{2}\cdot 1\cdot\frac{\sqrt{3}}{3}\\&=\frac{\sqrt{3}}{6}\end{aligned}$$

である。

さらに，xz 平面に関する対称性から，四角錐 G–CJHI の G から底面 CJHI に下ろした垂線は xz 平面上にある。

そこで，この垂線と底面 CJHI との交点を K，C から xy 平面に下ろした垂線と xy 平面との交点を L とすると，

$$\triangle\mathrm{GMK}\backsim\triangle\mathrm{CML},\ \frac{\mathrm{GM}}{\mathrm{CM}}=\frac{2}{3}$$

であるから

$$\begin{aligned}\mathrm{GK}&=\frac{2}{3}\mathrm{CL}\\&=\frac{4}{3}\sqrt{2}\end{aligned}$$

であることがわかる。

したがって，

$$V=\frac{1}{3}\cdot S\cdot \mathrm{GK}$$
$$=\frac{2}{27}\sqrt{6}$$

である。

（注）

GK の長さを求めるためには，

a) xz 平面に着目して，点 G と直線 CM の距離を，点と直線の距離の公式により求める。

b) xz 平面に着目して，CM と垂直で点 G を通る直線が GK であることから直線 GK の方程式を求め，CM と GK の交点 K の座標を求める。

c) 点 K が CM 上の点であり $\overrightarrow{\mathrm{CM}}\perp\overrightarrow{\mathrm{GK}}$ を満たすことから，ベクトルを用いて $|\overrightarrow{\mathrm{GK}}|$ を求める。

などの方法も考えられる。

[5]

(1)

$\log_4 \dfrac{x}{8} = m + \alpha$ より

$$\frac{\log_2 \frac{x}{8}}{\log_2 4} = m + \alpha$$

$$\log_2 \frac{x}{8} = 2(m + \alpha)$$

$$\log_2 x - \log_2 8 = 2(m + \alpha)$$

$$\log_2 x = 3 + 2(m + \alpha) \qquad \cdots\cdots①$$

と表せる。

(2)

(1) と同様にして，$\log_2 \dfrac{8}{x} = n + \beta$ より

$$\log_2 x = 3 - (n + \beta) \qquad \cdots\cdots②$$

と表せる。

①②より，

$$3 + 2(m + \alpha) = 3 - (n + \beta)$$

$$2\alpha + \beta = -(2m + n) \qquad \cdots\cdots③$$

が得られる。

ここで，

$$\begin{cases} 0 \leqq \log_4 \dfrac{x}{8} - m < 1 \\ 0 \leqq \log_2 \dfrac{8}{x} - n < 1 \end{cases}$$

であることから

$$\begin{cases} \log_4 \dfrac{x}{8} - 1 < m \leqq \log_4 \dfrac{x}{8} \\ \log_2 \dfrac{8}{x} - 1 < n \leqq \log_2 \dfrac{8}{x} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \log_2 x - 5 < 2m \leqq \log_2 x - 3 \\ 2 - \log_2 x < n \leqq 3 - \log_2 x \end{cases}$$

であり，

$$-3 < 2m + n \leqq 0$$

であることがわかる。

m, n は整数なので，

$$2m + n = -2, -1, 0 \qquad \cdots\cdots④$$

が必要であるといえる。

逆に，たとえば $x = 1$ のとき

$$\left(\log_4 \frac{x}{8}, \log_2 \frac{8}{x}\right) = \left(-\frac{3}{2}, 3\right)$$

$$(m, n) = (-2, 3)$$

$$2m + n = -1$$

$x=2$ のとき

$$\left(\log_4\frac{x}{8}, \log_2\frac{8}{x}\right)=(-1,2)$$
$$(m,n)=(-1,2)$$
$$2m+n=0$$

$x=6$のとき
$$\left(\log_4\frac{x}{8}, \log_2\frac{8}{x}\right)=\left(\log_4\frac{3}{4}, \log_2\frac{4}{3}\right)$$
$$(m,n)=(-1,0)$$
$$2m+n=-2$$

であり，確かに

$$2m+n=-2,-1,0$$

をとる x の値は存在する。

したがって，③より，$2\alpha+\beta$ の取りうる値は $0,1,2$ である。

(3)

$n=m-1$のとき

$$2m+n=3m-1$$

である。

m は整数なので，④より

$$2m+n=-1$$
$$3m-1=-1$$
$$m=0$$

と求められる。

よって，

$$(m,n)=(0,-1)$$

である。

(4)

(3) のとき，

① $\Longleftrightarrow \log_2 x=3+2\alpha$

② $\Longleftrightarrow \log_2 x=4-\beta$

である。

$$\begin{cases}0 \leqq \alpha < 1\\ 0 \leqq \beta < 1\end{cases}$$

であることを用いると，

$$\begin{cases}3 \leqq \log_2 x < 5\\ 3 < \log_2 x \leqq 4\end{cases}$$

すなわち

$$3 < \log_2 x \leqq 4 \qquad \cdots\cdots⑤$$

が必要であることがわかる。

逆に，⑤が成り立つとき

$$\log_4\frac{x}{8}=\frac{\log_2\frac{x}{8}}{\log_2 4}$$
$$=\frac{1}{2}\log_2\frac{x}{8}$$
$$=\frac{1}{2}(\log_2 x-3)$$

より $0<\log_4\frac{x}{8}\leqq\frac{1}{2}$ であり，

$m=0$

だといえる。

また，

$\log_2\frac{8}{x}=3-\log_2 x$ より

$-1\leqq\log_2\frac{8}{x}<0$ であり，

$n=-1$

だといえる。

よって，

$n=m-1$

は確かに成り立つ。

以上より，求める必要十分条件は

$3<\log_2 x\leqq 4$

すなわち

$8<x\leqq 16$

である。

[6]

(1) $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + 17$ について,

$$f'(x) = 3x^2 + 2ax + b$$

となる。

$f(x)$ は三次関数で, $x = p,\ -4p$ で極値をとるので, 二次方程式 $f'(x) = 0$ の二つの解が $x = p,\ -4p$ となる。

このことから, 二次方程式の解と係数の関係から,

$$\begin{cases} p + (-4p) = -\dfrac{2}{3}a \\ p \cdot (-4p) = \dfrac{1}{3}b \end{cases} \quad \text{より,} \quad \begin{cases} a = \dfrac{9}{2}p & \cdots\cdots ① \\ b = -12p^2 & \cdots\cdots ② \end{cases}$$

となる。

これより,

$$f(x) = x^3 + \frac{9}{2}px^2 - 12p^2x + 17$$

となるから,

$$f(-2p) = (-2p)^3 + \frac{9}{2} \cdot (-2p)^2 - 12p^2 \cdot (-2p) + 17 = 34p^3 + 17$$

となるが, さらに $f(-2p) = -17$ であるから,

$$34p^3 + 17 = -17$$
$$p^3 = -1$$

となり, p は実数であるから,

$$p = -1 \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

となる。

これと, ①, ②より,

$$a = -\frac{9}{2}, \quad b = -12 \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

となる。

このとき,

$$f(x) = x^3 - \frac{9}{2}x^2 - 12x + 17$$

より,

$$f'(x) = 3x^2 - 9x - 12 = 3(x+1)(x-4)$$

となるので, $f(x)$ は下表のように増減する。

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	4	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$

よって, 極大値は,

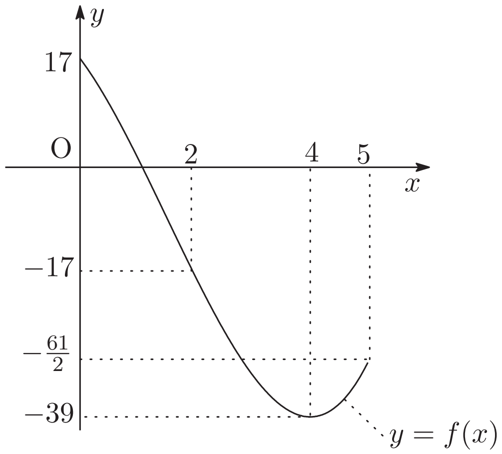
$$M = f(-1) = (-1)^3 - \frac{9}{2} \cdot (-1)^2 - 12 \cdot (-1) + 17 = \frac{47}{2}$$

であり, 極小値は,

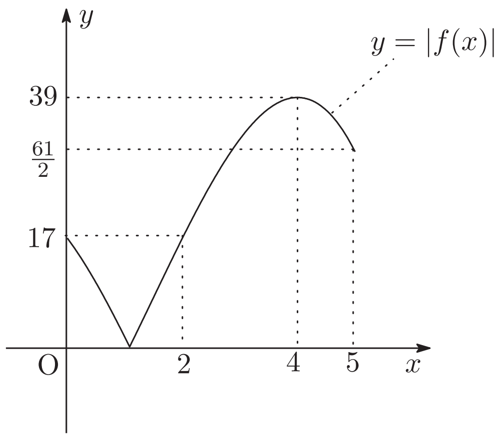
$$m = f(4) = 4^3 - \frac{9}{2} \cdot 4^2 - 12 \cdot 4 + 17 = -39$$

となる。

(2) (1) より, $y=f(x)$ の $0 \leqq x \leqq 5$ でのグラフは下図のようになる。



これに対して, $y=|f(x)|$ のグラフは, $f(x) \geqq 0$ となる x においては $y=f(x)$ そのものとなり, $f(x)<0$ となる x においては $y=f(x)$ のグラフを x 軸に関して対称移動したものとなるので, 下図のようになる。



このグラフから, $0 \leqq t \leqq 5$ の t について, $0 \leqq x \leqq t$ における $|f(x)|$ の最大値は次のようになる。

(i) $0 \leqq t \leqq 2$ のとき,

$$g(t)=|f(0)|=17$$

(ii) $2<t \leqq 4$ のとき,

$$g(t)=|f(t)|=-f(t)=-t^3+\frac{9}{2}t^2+12t-17$$

(iii) $4<t \leqq 5$ のとき,

$$g(t)=|f(4)|=39$$

以上より,

$$g(t)=\begin{cases} 17 & (0 \leqq t \leqq 2 \text{ のとき}) \\ -t^3+\dfrac{9}{2}t^2+12t-17 & (2<t \leqq 4 \text{ のとき}) \\ 39 & (4<t \leqq 5 \text{ のとき}) \end{cases} \qquad \cdots\cdots(答)$$

となる。

(3) (2) の結果より,

$$\begin{aligned}
\int_0^5 g(t)dt &= \int_0^2 g(t)dt + \int_2^4 g(t)dt + \int_4^5 g(t)dt \\
&= \int_0^2 17dt + \int_2^4 \left(-t^3 + \frac{9}{2}t^2 + 12t - 17\right) dt + \int_4^5 39dt \\
&= \Big[17t\Big]_0^2 + \left[-\frac{1}{4}t^4 + \frac{3}{2}t^3 + 6t^2 - 17t\right]_2^4 + \Big[39t\Big]_4^5 \\
&= 17(2-0) - \frac{4^4 - 2^4}{4} + \frac{3(4^3 - 2^3)}{2} + 6(4^2 - 2^2) - 17(4-2) + 39(5-4) \\
&= 135 \qquad \cdots\cdots(\text{答})
\end{aligned}$$

となる。