2024年度 慶應義塾大学 医学部 数学

[**I**]

(1)

(あ)	(い)	(う)	(え)
$\dfrac{3}{2}$	$\dfrac{\sqrt{3}}{6}$	$\dfrac{5-\sqrt{7}}{2}$	$\dfrac{5\sqrt{3}-\sqrt{21}}{6}$

三角形 OAB の外心を P，内心を I とする．

OP $=$ AP より，P は OA の垂直二等分線 $x=\dfrac{3}{2}$ 上にあるから，$\mathrm{P}\left(\dfrac{3}{2},\ s\right)$ とおくことができて，OP $=$ BP より，

$$\left(\frac{3}{2}\right)^2+s^2=\left(\frac{3}{2}-1\right)^2+\left(s-\sqrt{3}\right)^2$$

$$\therefore\quad \frac{9}{4}+s^2=\frac{1}{4}+s^2-2\sqrt{3}s+3 \qquad \therefore\quad s=\frac{\sqrt{3}}{6}$$

となる．よって，

$$\mathrm{P}\left(\frac{3}{2},\ \frac{\sqrt{3}}{6}\right) \qquad \cdots\cdots\ (あ),\ (い)$$

である．一方，三角形 OAB は領域 $y \geqq 0$ に含まれ，三角形 OAB の内接円は x 軸に接するから，内接円の半径を $r(>0)$ とすると，I の y 座標は r である．

$$\mathrm{OA}=3,\ \mathrm{OB}=\sqrt{1^2+(\sqrt{3})^2}=2,\ \mathrm{AB}=\sqrt{(3-1)^2+(\sqrt{3})^2}=\sqrt{7}$$

であることと，三角形 OAB の面積が

$$\frac{1}{2}\cdot 3\cdot\sqrt{3}=\frac{3\sqrt{3}}{2}$$

であることから，

$$\frac{1}{2}(3+2+\sqrt{7})r=\frac{3\sqrt{3}}{2} \qquad \therefore\quad r=\frac{3\sqrt{3}}{5+\sqrt{7}}=\frac{5\sqrt{3}-\sqrt{21}}{6}$$

である．また，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=(1,\ \sqrt{3})=2\left(\cos\dfrac{\pi}{3},\ \sin\dfrac{\pi}{3}\right)$ であること，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ が x 軸の正の方向であること，OI が $\angle\mathrm{AOB}$ を二等分することから，$\angle\mathrm{IOA}=\dfrac{\pi}{6}$ となる．したがって，I の x 座標は，

$$\frac{r}{\tan\dfrac{\pi}{6}}=\frac{5-\sqrt{7}}{2}$$

である．以上により，

$$\mathrm{I}\left(\frac{5-\sqrt{7}}{2},\ \frac{5\sqrt{3}-\sqrt{21}}{6}\right) \qquad \cdots\cdots\ (う),\ (え)$$

である．

≪注≫

1° 三角形 OAB の内接円と OA，AB，OB の接点を順に C，D，E とすると，円外の点から円に引いた接線の 2 接点までの距離が等しいことより，

$$\mathrm{OC}=\mathrm{OE},\ \mathrm{AC}=\mathrm{AD},\ \mathrm{BD}=\mathrm{BE}$$

である．$\mathrm{OC}=\mathrm{OE}=t$ とおくと，

$$\mathrm{AD}=\mathrm{AC}=\mathrm{OA}-\mathrm{OC}=3-t$$

$$\mathrm{BD}=\mathrm{BE}=\mathrm{OB}-\mathrm{OE}=2-t$$

であるから，$\mathrm{AD}+\mathrm{BD}=\mathrm{AB}$ より，

$$(3-t)+(2-t)=\sqrt{7}$$

$$\therefore\quad t=\frac{5-\sqrt{7}}{2}$$

であり，これが内心 I の x 座標である．このことと，$\angle\mathrm{IOA}=\dfrac{\pi}{6}$ より，I の y 座標は，

$$t\tan\frac{\pi}{6}=\frac{5-\sqrt{7}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{3}=\frac{5\sqrt{3}-\sqrt{21}}{6}$$

となる．よって，

$$\mathrm{I}\left(\frac{5-\sqrt{7}}{2},\ \frac{5\sqrt{3}-\sqrt{21}}{6}\right)$$

である．

2° 内心の座標を求めるところは次のようにベクトルを利用することもできる．2 直線 OI，AB の交点を F とすると，$\angle\mathrm{AOF}=\angle\mathrm{BOF}$ より，$\mathrm{AF}:\mathrm{BF}=\mathrm{OA}:\mathrm{OB}=3:2$ であるから，

$$\overrightarrow{\mathrm{OF}}=\frac{2\overrightarrow{\mathrm{OA}}+3\overrightarrow{\mathrm{OB}}}{3+2}=\frac{2\overrightarrow{\mathrm{OA}}+3\overrightarrow{\mathrm{OB}}}{5}$$

であり，$\angle\mathrm{OAI}=\angle\mathrm{FAI}$ より，$\mathrm{OI}:\mathrm{IF}=\mathrm{OA}:\mathrm{AF}=3:\dfrac{3}{3+2}\mathrm{AB}=5:\sqrt{7}$ であるから，

$$\overrightarrow{\mathrm{OI}}=\frac{5}{5+\sqrt{7}}\overrightarrow{\mathrm{OF}}=\frac{2\overrightarrow{\mathrm{OA}}+3\overrightarrow{\mathrm{OB}}}{5+\sqrt{7}}$$

$$=\frac{1}{5+\sqrt{7}}(9,\ 3\sqrt{3})=\frac{5-\sqrt{7}}{18}(9,3\ \sqrt{3})=\left(\frac{5-\sqrt{7}}{2},\ \frac{5\sqrt{3}-\sqrt{21}}{6}\right)$$

となる．

(2)

(お)	(か)	(き)	(く)
$-\dfrac{2X}{3Y}$	$\dfrac{\sqrt{6}}{2}$	1	$\sqrt{6}$

楕円 $\dfrac{x^2}{3}+\dfrac{y^2}{2}=1$ 上の第 1 象限の点 $(X,\ Y)$ におけるこの楕円の接線 ℓ の方程式は，

$$\ell:\ \frac{Xx}{3}+\frac{Yy}{2}=1 \quad \cdots\cdots①$$

であるから，その傾きは，$Y>0$ に注意して，

$$-\frac{2X}{3Y} \qquad \cdots\cdots \text{(お)}$$

である．① より，ℓ と x 軸との交点 P，y 軸との交点 Q の座標は，$X>0,\ Y>0$ に注意すれば，

$$\mathrm{P}\left(\frac{3}{X},\ 0\right),\ \mathrm{Q}\left(0,\ \frac{2}{Y}\right)$$

となり，三角形 OPQ の面積は，

$$\frac{1}{2}\mathrm{OP}\cdot\mathrm{OQ}=\frac{3}{XY}$$

である．ここで，点 $(X,\ Y)$ が楕円 $\dfrac{x^2}{3}+\dfrac{y^2}{2}=1$ 上の第 1 象限の部分にあることより，

$$X=\sqrt{3}\cos\theta,\ Y=\sqrt{2}\sin\theta,\ 0<\theta<\frac{\pi}{2}$$

と表せることを用いると，三角形 OPQ の面積は，

$$\frac{3}{XY}=\frac{3}{\sqrt{6}\sin\theta\cos\theta}=\frac{\sqrt{6}}{\sin 2\theta}\geqq\sqrt{6}$$

と表され，等号は，$0<2\theta<\pi$ に注意すると，

$$\sin 2\theta=1 \qquad \therefore\quad \theta=\frac{\pi}{4}$$

のとき，かつそのときにのみ成り立つ．したがって，三角形 OPQ の面積は，

$$(X,\ Y)=\left(\frac{\sqrt{6}}{2},\ 1\right) \text{ のとき最小となり，最小値は } \sqrt{6} \quad \cdots\cdots \text{(か)，(き)，(く)}$$

である．

(3)

(け)	(こ)
$\dfrac{4\sqrt{3}}{9}$	$\dfrac{2}{3}$

$y=\cos x\sin 2x=2\sin x\cos^2 x$ のとき，

$$\begin{aligned}y'&=2\{\cos x\cdot\cos^2 x+\sin x\cdot 2\cos x(-\sin x)\}\\&=2\cos x(1-3\sin^2 x)=2\cos x(1+\sqrt{3}\sin x)(1-\sqrt{3}\sin x)\end{aligned}$$

より，$\sin\alpha=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$，$0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$ を満たす α を用いると，$0\leqq x\leqq\dfrac{\pi}{2}$ における y の増減は下表のようになる．

x	0	$\cdots$	α	$\cdots$	$\dfrac{\pi}{2}$
y'		$+$	0	$-$	
y	0	$\nearrow$		$\searrow$	0

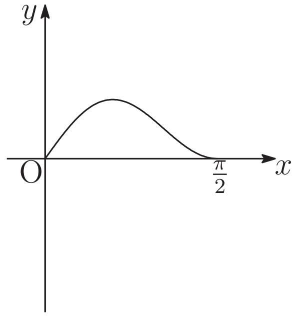
これより，求める最大値は，

$$\cos^2\alpha=1-\sin^2\alpha=\frac{2}{3}$$

を用いると，

$$2\sin\alpha\cos^2\alpha=2\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}\cdot\frac{2}{3}=\frac{4\sqrt{3}}{9} \qquad \cdots\cdots(け)$$

となり，関数 $y=\cos x\sin 2x$ のグラフの概形は右図のようになる．



したがって，求める面積は，

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{2}} y\,dx &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\sin x\cos^2 x\,dx \\ &= -\int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\cos^2 x(\cos x)'\,dx \\ &= -\left[\frac{2}{3}\cos^3 x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{2}{3} \qquad \cdots\cdots(こ)\end{aligned}$$

である．

≪注≫ $y=2\sin x(1-\sin^2 x)$ であるから，最大値を求めるところは，$\sin x=t$ と置き換えて 3 次関数 $y=2t(1-t^2)$ を考えてもよい．

［Ⅱ］

【解答】

（あ）	（い）	（う）	（え）	（お）	（か）	（き）
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{3}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$

（く）	（け）	（こ）	（さ）	（し）	（す）	（せ）
$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{5}$	2	$\frac{1}{3}$

【解説】

(1)　$A\to A$ となるのは，袋 1 から白を取り出し袋 2 に入れ，次に袋 2 から白を取り出す場合である．よって，

$$P(A\to A)=1\cdot\frac{2}{4}=\frac{1}{2} \qquad \cdots(あ)$$

$A\to B$ となるのは，袋 1 から白を取り出し袋 2 に入れ，次に袋 2 から赤を取り出す場合である．よって，

$$P(A\to B)=1\cdot\frac{2}{4}=\frac{1}{2} \qquad \cdots(い)$$

$B\to A$ となるのは，袋 1 から赤を取り出し袋 2 に入れ，次に袋 2 から白を取り出す場合である．よって，

$$P(B\to A)=\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{4}=\frac{1}{6} \qquad \cdots(う)$$

$B\to B$ となるのは，袋 1 から赤を取り出し袋 2 に入れ，次に袋 2 から赤を取り出す，または，袋 1 から白を取り出し袋 2 に入れ，次に袋 2 から白を取り出す場合である．よって，

$$P(B\to B)=\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{4}+\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{4}=\frac{2}{3} \qquad \cdots(え)$$

C のとき，袋 1 には赤 2 個，白 1 個があり，操作 T を 1 回行っても赤が 0 個となることはなく，$C\to A$ とならない．よって，

$$P(C\to A)=0 \qquad \cdots(お)$$

$C\to B$ となるのは，袋 1 から赤を取り出し袋 2 に入れ，次に袋 2 から白を取り出す場合である．よって，

$$P(C\to B)=\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{4}=\frac{1}{2} \qquad \cdots(か)$$

(2)　(1)より，$n\geqq 2$ のとき，

$$\begin{cases} a_n = \dfrac{1}{2}a_{n-1} + \dfrac{1}{6}b_{n-1} + 0\cdot c_{n-1} & \cdots① \\ b_n = \dfrac{1}{2}a_{n-1} + \dfrac{2}{3}b_{n-1} + \dfrac{1}{2}c_{n-1} & \cdots② \end{cases}$$

であり，$a_0=0$，$b_0=1$，$c_0=0$と定めると，これらは$n=1$のときも成り立つ．

②より，

$$b_n = \frac{1}{2}(a_{n-1}+c_{n-1}) + \frac{2}{3}b_{n-1}$$

となる．袋1の状態はA，B，Cのいずれかであることから，

$$a_{n-1}+b_{n-1}+c_{n-1}=1$$

であり，

$$b_n = \frac{1}{2}(1-b_{n-1}) + \frac{2}{3}b_{n-1} \qquad \therefore \quad b_n = \frac{1}{6}b_{n-1} + \frac{1}{2} \qquad \cdots(き),\ (く)$$

$$\therefore \quad b_n - \frac{3}{5} = \frac{1}{6}\left(b_{n-1} - \frac{3}{5}\right) \ (n \geqq 1)$$

である．よって，数列$\left\{b_n - \dfrac{3}{5}\right\}$は公比$\dfrac{1}{6}$の等比数列であるから，

$$b_n - \frac{3}{5} = \left(b_0 - \frac{3}{5}\right)\left(\frac{1}{6}\right)^n \qquad \therefore \quad b_n = \frac{3}{5} + \frac{2}{5}\left(\frac{1}{6}\right)^n \ (n \geqq 0) \qquad \cdots③(け),\ (こ),\ (さ)$$

である．

①，③より，$n \geqq 1$において，

$$a_n = \frac{1}{2}a_{n-1} + \frac{1}{6}\left\{\frac{3}{5} + \frac{2}{5}\left(\frac{1}{6}\right)^{n-1}\right\}$$

が成り立ち，両辺に2^nをかけると，

$$2^n a_n = 2^{n-1}a_{n-1} + \frac{1}{5}\cdot 2^{n-1} + \frac{2}{15}\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$$

が成り立つ．さらに，$d_n = \dfrac{a_n}{\left(\frac{1}{2}\right)^n} = 2^n a_n$とおくとき，

$$d_n = d_{n-1} + \frac{1}{5}\cdot 2^{n-1} + \frac{2}{15}\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} \ (n \geqq 1)$$

となる．$d_0 = 2^0 a_0 = 0$より，$n \geqq 1$のとき，

$$d_n = d_0 + \sum_{k=1}^{n}\left\{\frac{1}{5}\cdot 2^{k-1} + \frac{2}{15}\left(\frac{1}{3}\right)^{k-1}\right\} = \frac{1}{5}\cdot\frac{2^n-1}{2-1} + \frac{2}{15}\cdot\frac{1-\left(\frac{1}{3}\right)^n}{1-\frac{1}{3}} = \frac{1}{5}\left\{2^n - \left(\frac{1}{3}\right)^n\right\}$$

$\cdots(し),\ (す),\ (せ)$

である．

[Ⅲ]

【解答】

(あ)	(い)	(う)	(え)	(お)	(か)	(き)	(く)	(け)	(こ)
$-\dfrac{1}{\sqrt{3}}$	$\dfrac{\sqrt{3}}{2}$	$\dfrac{1}{\sqrt{3}}$	$-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$	$m<-\dfrac{4}{3}$	$\dfrac{1}{6}$	$-\dfrac{1}{3}$	$\dfrac{1}{6}$	$\dfrac{1}{6}\log\dfrac{3m+2+\sqrt{9m^2+12m}}{2}$	1

【解説】

(1) $f(x)=\dfrac{1}{3}(x^3-x)^{-1}$ であるから，

$$f'(x)=-\frac{1}{3}(x^3-x)^{-2}(3x^2-1)=\frac{1-3x^2}{3x^2(x^2-1)^2}=\frac{(1+\sqrt{3}x)(1-\sqrt{3}x)}{3x^2(x^2-1)^2}$$

である．

よって，$x>0$ における $f(x)$ の増減は次の通りである．

x	(0)	$\cdots$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\cdots$	(1)	$\cdots$
$f'(x)$	$\diagdown$	$+$	0	$-$	$\diagdown$	$-$
$f(x)$	$\diagdown$	$\nearrow$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\searrow$	$\diagdown$	$\searrow$

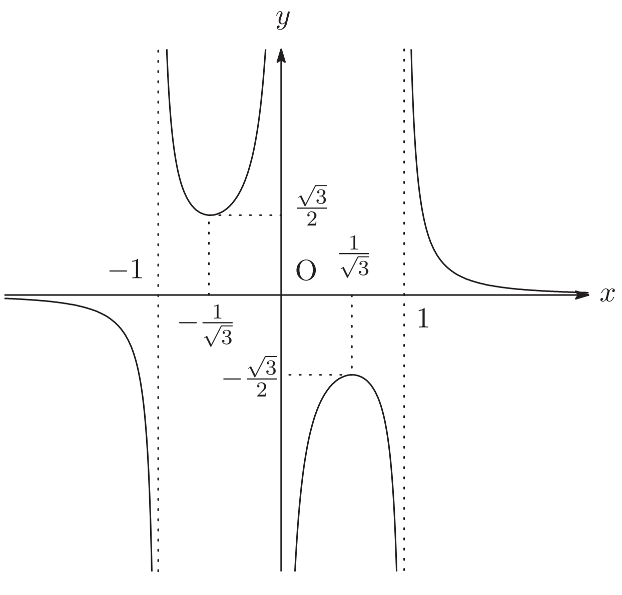
さらに $f(x)$ は奇関数であるから，

$x=-\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ において極小値 $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ をとり， $\cdots$(あ), (い)

$x=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ において極大値 $-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ をとる． $\cdots$(う), (え)

(2) $$\lim_{x\to+0}f(x)=-\infty,\quad \lim_{x\to1\pm0}f(x)=\pm\infty\ (\text{複号同順}),\quad \lim_{x\to\infty}f(x)=0$$

を考慮すると，$y=f(x)$ のグラフの概形は次の通りである．



(3)　$m=0$ のとき，$y=f(x)$ と $y=mx$ は交点をもたないから，$m\neq 0$ としてよい．このとき，

$$f(x)=mx \iff x^4-x^2-\frac{1}{3m}=0 \qquad \cdots ①$$

4 次方程式①は $x=0,\ x=\pm 1$ を解にもたないから，

$y=f(x)$ と $y=mx$ がちょうど 4 点で交わる．
$\iff$ ①が異なる 4 つの実数解をもつ．
$\iff$ 2 次方程式 $t^2-t-\dfrac{1}{3m}=0$ が異なる正の 2 解をもつ．　$\cdots(*)$

となる．

ここで，2 次方程式 $t^2-t-\dfrac{1}{3m}=0$ の 2 解を $\alpha,\ \beta$，判別式を D とおくと，

$$\begin{aligned}(*) &\iff \alpha\neq\beta \text{ かつ } \alpha>0 \text{ かつ } \beta>0\\ &\iff D=1+\frac{4}{3m}>0 \text{ かつ } \alpha+\beta=1>0 \text{ かつ } \alpha\beta=-\frac{1}{3m}>0\\ &\iff m<-\frac{4}{3} \qquad \cdots(\text{お})\end{aligned}$$

となる．

(4)

$$\begin{aligned}&f(x)=\frac{a}{x-1}+\frac{b}{x}+\frac{c}{x+1}\\ \iff &\frac{1}{3}=ax(x+1)+b(x+1)(x-1)+cx(x-1) \quad (x\neq 0,\ x\neq\pm 1)\\ \iff &\frac{1}{3}=(a+b+c)x^2+(a-c)x-b \quad (x\neq 0,\ x\neq\pm 1) \qquad \cdots ②\end{aligned}$$

となり，②が恒等式であるための条件は，

$$\begin{cases}a+b+c=0\\ a-c=0\\ -b=\dfrac{1}{3}\end{cases}$$

である．これを解いて，

$$a=\frac{1}{6},\quad b=-\frac{1}{3},\quad c=\frac{1}{6} \qquad \cdots(\text{か}),\ (\text{き}),\ (\text{く})$$

を得る．

(5)　$m>0$ のとき，$x(m)$ は①の正の解であるから，① を x^2 の 2 次方程式として解くことにより，

$$\{x(m)\}^2=\frac{1+\sqrt{1+\dfrac{4}{3m}}}{2} \qquad \cdots ③$$

である．

$1 < x(m)$ であり，$x(m) < T$ のとき，(4) を用いると，

$$\begin{aligned}\int_{x(m)}^{T} f(x)dx &= \int_{x(m)}^{T} \left\{ \frac{1}{6(x-1)} - \frac{1}{3x} + \frac{1}{6(x+1)} \right\} dx \\ &= \left[\frac{1}{6}\log(x-1) - \frac{1}{3}\log x + \frac{1}{6}\log(x+1) \right]_{x(m)}^{T} \\ &= \left[\frac{1}{6}\log\frac{x^2-1}{x^2} \right]_{x(m)}^{T} \\ &= \frac{1}{6}\log\left(1 - \frac{1}{T^2}\right) - \frac{1}{6}\log\left(1 - \frac{1}{\{x(m)\}^2}\right)\end{aligned}$$

となる．

$\displaystyle\lim_{T\to\infty} \log\left(1 - \frac{1}{T^2}\right) = 0$ より，

$$\begin{aligned}A(m) &= -\frac{1}{6}\log\left(1 - \frac{1}{\{x(m)\}^2}\right) & \cdots④ \\ &= -\frac{1}{6}\log\left(1 - \frac{2}{1+\sqrt{1+\dfrac{4}{3m}}}\right) & (③より) \\ &= \frac{1}{6}\log\frac{\sqrt{1+\dfrac{4}{3m}}+1}{\sqrt{1+\dfrac{4}{3m}}-1} \\ &= \frac{1}{6}\log\frac{3m+2+\sqrt{9m^2+12m}}{2} & \cdots(け)\end{aligned}$$

である．

また，

$$B(m) = \triangle\mathrm{OPQ} = \frac{1}{2}x(m)\cdot mx(m) = \frac{m\{x(m)\}^2}{2} = \frac{m+\sqrt{m^2+\dfrac{4m}{3}}}{4} = \frac{3m+\sqrt{9m^2+12m}}{12}$$

である．

よって，

$$\begin{aligned}\lim_{m\to+0}\frac{A(m)}{B(m)} &= \lim_{m\to+0}\frac{\log\dfrac{3m+2+\sqrt{9m^2+12m}}{2}}{\dfrac{3m+\sqrt{9m^2+12m}}{2}} \\ &= \lim_{m\to+0}\frac{\log\left(1+\dfrac{3m+\sqrt{9m^2+12m}}{2}\right)}{\dfrac{3m+\sqrt{9m^2+12m}}{2}}\end{aligned}$$

であるが，$\dfrac{3m+\sqrt{9m^2+12m}}{2}=h$ とおくと，$\displaystyle\lim_{m\to+0}h=0$ であるから，

$$\lim_{m\to+0}\frac{A(m)}{B(m)}=\lim_{h\to 0}\frac{\log(1+h)}{h}=1 \qquad \cdots(\text{こ})$$

となる．

【注】

$\displaystyle\lim_{m\to+0}\frac{A(m)}{B(m)}$ の極限計算については，$x(m)$ の式として整理してもよい．

$x(m)$ は①の正の解であるから，

$$\{x(m)\}^4-\{x(m)\}^2=\frac{1}{3m},\quad \text{すなわち } m=\frac{1}{3\{x(m)\}^2(\{x(m)\}^2-1)}$$

が成り立つ．これを用いると，

$$B(m)=\frac{m\{x(m)\}^2}{2}=\frac{1}{6(\{x(m)\}^2-1)}$$

と表せるから，④と合わせて

$$\frac{A(m)}{B(m)}=\frac{-\dfrac{1}{6}\log\left(1-\dfrac{1}{\{x(m)\}^2}\right)}{\dfrac{1}{6(\{x(m)\}^2-1)}}=\frac{\log\dfrac{\{x(m)\}^2}{\{x(m)\}^2-1}}{\dfrac{1}{\{x(m)\}^2-1}}=\frac{\log\left(1+\dfrac{1}{\{x(m)\}^2-1}\right)}{\dfrac{1}{\{x(m)\}^2-1}}$$

となる．

③より，$\displaystyle\lim_{m\to+0}x(m)=\infty$ であるから，$\dfrac{1}{\{x(m)\}^2-1}=X(m)$ とおくと，$\displaystyle\lim_{m\to+0}X(m)=0$ である．

したがって，

$$\lim_{m\to+0}\frac{A(m)}{B(m)}=\lim_{X(m)\to 0}\frac{\log(1+X(m))}{X(m)}=1$$

となる．

[IV]

【解答】

（あ）	（い）	（う）	（え）	（お）	（か）	（き）	（く）
$5t-8$	$-t$	$3t-6$	$2t-3$	t	$-t$	t	t

（け）	（こ）	（さ）（し）（す）	（せ）	（そ）	（た）	（ち）
$-8t^2+24t-12$	8	ABD, ACD, BCD（順不同）	$\frac{3}{5}$	$\frac{4}{5}$	$\frac{11}{7}$	$\frac{44}{7}$

【解説】

(1)　四面体OABCの辺のうち，平面$z=t$（$1<t<2$）と交点をもつのは，4辺OB, OC, AB, ACである．tを1に限りなく近づけるとき，平面$z=1$と2辺AB, ACの交点は限りなくAに近づき，tを2に限りなく近づけるとき，平面$z=2$と2辺OB, ABの交点は限りなくBに近づく．よって，$1<t<2$におけるS_tは，平面$z=t$と，

辺ABとの交点をW

辺ACとの交点をX

辺OBとの交点をY

辺OCとの交点をZ

とした4つの頂点W, X, Y, Zをもつ四角形である．

W, X, Y, Zのz座標がtであることより，Wは辺ABを$(t-1):(2-t)$に内分するから，

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OW}}&=\frac{(2-t)\overrightarrow{\mathrm{OA}}+(t-1)\overrightarrow{\mathrm{OB}}}{(t-1)+(2-t)}\\&=(2-t)(-3,-1,1)+(t-1)(2,-2,2)\\&=(5t-8,-t,t)\end{aligned}$$

Xは辺ACを$(t-1):(3-t)$に内分するから，

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OX}}&=\frac{(3-t)\overrightarrow{\mathrm{OA}}+(t-1)\overrightarrow{\mathrm{OC}}}{(t-1)+(3-t)}\\&=\frac{3-t}{2}(-3,-1,1)+\frac{t-1}{2}(3,3,3)\\&=(3t-6,2t-3,t)\end{aligned}$$

Yは辺OBを$t:(2-t)$に内分するから，

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OY}}&=\frac{t}{2}\overrightarrow{\mathrm{OB}}\\&=\frac{t}{2}(2,-2,2)\\&=(t,-t,t)\end{aligned}$$

Z は辺 OC を $t:(3-t)$ に内分するから,

$$\overrightarrow{OZ}=\frac{t}{3}\overrightarrow{OC}$$
$$=\frac{t}{3}(3,3,3)$$
$$=(t,t,t)$$

したがって,

W の座標 $(5t-8,-t,t)$ …（あ）（い）

X の座標 $(3t-6,2t-3,t)$ …（う）（え）

Y の座標 $(t,-t,t)$ …（お）（か）

Z の座標 (t,t,t) …（き）（く）

となる.

(2)　$t=1,2$ のときも, (1)の答のように W, X, Y, Z を定義する.

$1<t<2$ のとき,

$$(5t-8)-(3t-6)=2t-2>2\cdot1-2=0$$
$$(5t-8)-t=4t-8<4\cdot2-8=0$$

より, $3t-6<5t-8<t$ であり,

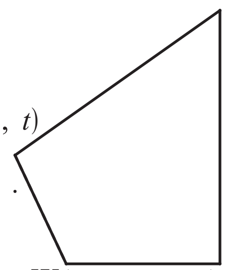
$$(2t-3)-(-t)=3t-3>3\cdot1-3=0$$
$$(2t-3)-t=t-3<2-3=-1<0$$

より, $-t<2t-3<t$ である.

よって, W, X, Y, Z の x 座標をそれぞれ x_W, x_X, x_Y, x_Z とし, y 座標をそれぞれ y_W, y_X, y_Y, y_Z とすると,

$$x_X<x_W<x_Y=x_Z,\quad y_W=y_Y<y_X<y_Z$$

であるから, S_t は右図の四角形 WXZY となる.



したがって, $1<t<2$ のときは,

$A(t)=$（三角形 WXY の面積）＋（三角形 XYZ の面積）

$$=\frac{1}{2}\cdot\{t-(5t-8)\}\cdot\{(2t-3)-(-t)\}+\frac{1}{2}\cdot\{t-(-t)\}\cdot\{t-(3t-6)\}$$
$$=(-2t+4)(3t-3)+t(-2t+6)$$
$$=-8t^2+24t-12$$

また, $t=1$ のときは W と X が一致, $t=2$ のときは W と Y が一致し, いずれの場合も $A(t)$ は上で（三角形 WXY の面積）$=0$ としたものであるから, $t=1,2$ のときの $A(t)$ もこれでよい.

以上より, $1\leqq t\leqq 2$ のとき,

$A(t)=-8t^2+24t-12$ …（け）

である.

また，四面体OABCの$z \leqq 1$の部分は，S_1を底面，Oを頂点とする三角錐，$z \geqq 2$の部分は，S_2を底面，Cを頂点とする三角錐である．よって，

$$\begin{aligned}V &= \frac{1}{3}\cdot A(1)\cdot 1+\int_1^2 A(t)\,dt+\frac{1}{3}\cdot A(2)\cdot 1\\ &= \frac{1}{3}\cdot 4\cdot 1+\int_1^2\left(-8t^2+24t-12\right)dt+\frac{1}{3}\cdot 4\cdot 1\\ &= \frac{8}{3}+\left[-\frac{8}{3}t^3+12t^2-12t\right]_1^2\\ &= \frac{8}{3}+\left(-\frac{64}{3}+48-24\right)-\left(-\frac{8}{3}+12-12\right)\\ &= 8\end{aligned}$$

…（こ）

となる．

(3)　多面体の辺は，必ず2面の交線である．題意の六面体の6つの面のうち3つの面が三角形OAB, OBC, OCAであるから，残り3つの面は，それぞれ辺AB，辺BC，辺CAを含む面である．Dが六面体の頂点に含まれることも合わせると，六面体の残りの面は，

ABD, ACD, BCD　　…（さ）（し）（す）

である．

次に，$\overrightarrow{AE}=u\overrightarrow{AB}+v\overrightarrow{AC}$であるから，

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OE} &= \overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AE}\\ &= \overrightarrow{OA}+u\overrightarrow{AB}+v\overrightarrow{AC}\\ &= (-3,-1,1)+u(5,-1,1)+v(6,4,2)\\ &= (5u+6v-3,\,-u+4v-1,\,u+2v+1)\end{aligned}$$

であり，また，Eは線分OD上の点であるから，$0<w<1$を満たす実数wを用いて，

$$\overrightarrow{OE}=w\overrightarrow{OD}=(6w,2w,4w)$$

とおける．これらが一致するので，

$$\begin{cases}5u+6v-3=6w\\ -u+4v-1=2w\\ u+2v+1=4w\end{cases}$$

これを解くと，$w=\dfrac{4}{5}$であり（これは$0<w<1$を満たす），

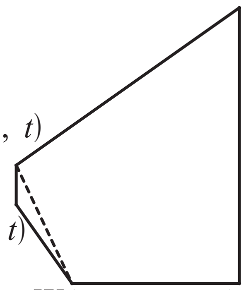
$$u=\frac{3}{5},\ v=\frac{4}{5}$$

…（せ）（そ）

である．したがって，$u+v=\dfrac{7}{5}>1$となるので，点Eはこの六面体の外にある．

(4)　(3)より，六面体OABCDは，四面体OABCと四面体ABCDをつなぎ合わせたものである．この六面体を平面$z=t$（$1<t<2$）で切った切り口の頂点は，(1)のW, X, Y, Zに加え，辺ADと平面$z=t$の交点Pであり，Pは辺ADを$(t-1):(4-t)$に内分するから，

$$\overrightarrow{OP}=\frac{(4-t)\overrightarrow{OA}+(t-1)\overrightarrow{OD}}{(t-1)+(4-t)}$$
$$=\frac{4-t}{3}(-3,-1,1)+\frac{t-1}{3}(6,2,4)$$
$$=(3t-6,t-2,t)$$



よって，Pの座標は$(3t-6,t-2,t)$である．

$1<t<2$に対して，

$$(2t-3)-(t-2)=t-1>1-1=0$$

であるから，六面体を平面$z=t$（$1<t<2$）で切った切り口は右図のようになる．

したがって，

$$U(t)=A(t)+\text{（三角形PWXの面積）}$$
$$=-8t^2+24t-12+\frac{1}{2}\cdot\{(2t-3)-(t-2)\}\cdot\{(5t-8)-(3t-6)\}$$
$$=-8t^2+24t-12+(t-1)^2$$
$$=-7t^2+22t-11$$
$$=-7\left(t-\frac{11}{7}\right)^2+\frac{44}{7}$$

であるから，$U(t)$は$1<t<2$の範囲で，

$$t=\frac{11}{7}$$ …（た）

において最大値

$$\frac{44}{7}$$ …（ち）

をとる．