2024年度 神戸大学 前期 数学 理系

1.

(1)　$y = x + \sqrt{c - x^2}$　（$0 \leqq x \leqq \sqrt{c}$）について

$$y' = 1 + \frac{-2x}{2\sqrt{c-x^2}} = \frac{\sqrt{c-x^2} - x}{\sqrt{c-x^2}} = \frac{c - 2x^2}{\sqrt{c-x^2}(\sqrt{c-x^2}+x)}$$

$y' = 0$ とすると，$x = \sqrt{\dfrac{c}{2}}$

$\sqrt{c-x^2}(\sqrt{c-x^2}+x) > 0$ より，y の増減表は次のようになる．

x	0	$\cdots$	$\sqrt{\frac{c}{2}}$	$\cdots$	$\sqrt{c}$
y'		$+$	0	$-$	
y		$\nearrow$	(極大)	$\searrow$	

したがって，最大値をとるときの x の値 a_1 は

$$a_1 = \sqrt{\frac{c}{2}} \quad \cdots\cdots \text{(答)}$$

(2)　$y = x + \sqrt{a_n - x^2}$　（$0 \leqq x \leqq \sqrt{a_n}$）について，(1) と同様にして
最大値をとるときの x の値 a_{n+1} は

$$a_{n+1} = \sqrt{\frac{a_n}{2}}$$

よって

$$\log_2 a_{n+1} = \frac{1}{2}\log_2 \frac{a_n}{2} = \frac{1}{2}\log_2 a_n - \frac{1}{2}$$

$$\therefore b_{n+1} = \frac{1}{2}b_n - \frac{1}{2} \quad \cdots\cdots \text{(答)}$$

(3)　(2) より，$b_{n+1} + 1 = \dfrac{1}{2}(b_n + 1)$ であるから，
数列 $\{b_n + 1\}$ は 初項 $b_1 + 1$, 公比 $\dfrac{1}{2}$ の等比数列である．

$b_1 = \log_2 a_1 = \dfrac{1}{2}\log_2 \dfrac{c}{2} = \dfrac{1}{2}\log_2 c - \dfrac{1}{2}$ より

$$b_n + 1 = (b_1 + 1)\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

$$b_n = \left(\frac{1}{2}\log_2 c + \frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} - 1$$

$$\therefore\ b_n = (\log_2 c + 1)\left(\frac{1}{2}\right)^{n} - 1 \quad \cdots\cdots \text{(答)}$$

2.

（1）C と ℓ_1 より

$$ax^2+bx+c=-3x+3$$

$$ax^2+(b+3)x+(c-3)=0 \quad \cdots ①$$

$a \neq 0$ より①は x についての2次方程式であり，ℓ_1 が C に接するので，①は重解をもち，(判別式) $=0$

$$(b+3)^2-4a(c-3)=0 \quad \cdots ②$$

また，C と ℓ_2 より

$$ax^2+bx+c=x+3$$

$$ax^2+(b-1)x+(c-3)=0 \quad \cdots ③$$

上と同様にして，③は重解をもち，(判別式) $=0$

$$(b-1)^2-4a(c-3)=0 \quad \cdots ④$$

②−④より，$8b+8=0 \qquad \therefore\ b=-1$

これを②に代入して，$4-4a(c-3)=0 \qquad \therefore\ c=\dfrac{1}{a}+3$

以上より，$\boldsymbol{b=-1,\ c=\dfrac{1}{a}+3}$ ……(答)

（2）C が x 軸と異なる2点で交わるとき，2次方程式 $ax^2+bx+c=0$ は異なる2つの実数解をもち，

(判別式) >0

$$b^2-4ac>0$$

（1）の結果より，$(-1)^2-4a\left(\dfrac{1}{a}+3\right)>0$

$$a<-\frac{1}{4}$$

$\therefore\ \boldsymbol{-4<\dfrac{1}{a}<0}$ ……(答)

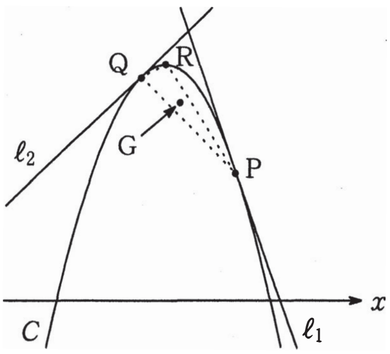
（3）（1）の結果より，①は

$$ax^2+2x+\frac{1}{a}=0$$

$$a\left(x+\frac{1}{a}\right)^2=0$$

$$x=-\frac{1}{a}$$

よって，$\mathrm{P}\left(-\dfrac{1}{a},\ \dfrac{3}{a}+3\right)$



また，②は

$$ax^2-2x+\frac{1}{a}=0$$

$$a\left(x-\frac{1}{a}\right)^2=0$$

$$x=\frac{1}{a}$$

よって，$\mathrm{Q}\left(\dfrac{1}{a},\ \dfrac{1}{a}+3\right)$

また，$C: y=ax^2-x+\dfrac{1}{a}+3=a\left(x-\dfrac{1}{2a}\right)^2+\dfrac{3}{4a}+3$ より，$\mathrm{R}\left(\dfrac{1}{2a},\ \dfrac{3}{4a}+3\right)$

$\mathrm{G}(X,\ Y)$ とおくと

$$\begin{cases} X = \dfrac{-\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{2a}}{3} = \dfrac{1}{6a} \quad \cdots⑤ \\ Y = \dfrac{\left(\dfrac{3}{a} + 3\right) + \left(\dfrac{1}{a} + 3\right) + \left(\dfrac{3}{4a} + 3\right)}{3} = \dfrac{\dfrac{19}{4a} + 9}{3} = \dfrac{19}{12a} + 3 \quad \cdots⑥ \end{cases}$$

⑤より，$\dfrac{1}{a} = 6X$ …⑤′

⑤′を⑥に代入して a を消去すると

$$Y = \frac{19}{2}X + 3 \quad \cdots⑦$$

一方，（2）より $-4 < \dfrac{1}{a} < 0$ なので，これと⑤′より

$$-4 < 6X < 0$$

$$-\frac{2}{3} < X < 0 \quad \cdots⑧$$

以上より，求める軌跡は⑦かつ⑧を満たす点 (X, Y) 全体の集合，つまり

直線 $y = \dfrac{19}{2}x + 3$ の $-\dfrac{2}{3} < x < 0$ の部分 ……(答)

3.

(1) 1個のサイコロを投げて出た目が必ずnの約数となるのは，nが1，2，3，4，5，6の公倍数となるときである．それらの最小公倍数は60であるから，nを小さい順に3つ求めると

60，120，180 ……(答)

(2) 1個のサイコロを投げて出た目がnの約数となる確率が$\frac{5}{6}$であるようなnの約数の候補は，次の6つの場合である．(1)と同様に考えて

1，2，3，4，5のとき，最小公倍数は60

1，2，3，4，6のとき，最小公倍数は12

1，2，3，5，6のとき，最小公倍数は30

1，2，4，5，6のとき，最小公倍数は60

1，3，4，5，6のとき，最小公倍数は60

2，3，4，5，6のとき，最小公倍数は60

60は1，2，3，4，5，6のすべての目が約数となるので，出た目がnの約数となる確率が$\frac{5}{6}$となるのは，nが

「12の倍数で5を約数にもたないもの」または「30の倍数で4を約数にもたないもの」

となるときである．このようなnを小さい順に3つ求めると

12，24，30 ……(答)

(3) $160=2^5\times5$より，出た目の積が160の約数となるのは，出た目の積が

$$2^a\cdot5^b \quad \begin{pmatrix} a=0,1,2,3,4,5 \\ b=0,1 \end{pmatrix}$$

の形で表されるときである．

(ⅰ) 5の目が1回出るとき

残りの2回は，1，2，4のいずれかの目が出ればよいから

$$ {}_3C_1\frac{1}{6}\left(\frac{3}{6}\right)^2=\frac{1}{8}$$

(ⅱ) 5の目が出ないとき

3回とも1，2，4のいずれかの目が出るときである．このうち3回とも4の目が出る場合のみ，目の積が$4^3=2^6$となり条件を満たさないので，この場合を除いて

$$\left(\frac{3}{6}\right)^3-\left(\frac{1}{6}\right)^3=\frac{26}{216}$$

(ⅰ)，(ⅱ)より，求める確率は

$$\frac{1}{8}+\frac{26}{216}=\mathbf{\frac{53}{216}} \quad \cdots\cdots(\text{答})$$

(注)　(3)で出た目の3数の組をすべて列挙すると表のようになる.

(a, b)	出た目の積	出た目の3数の組	目の出方の場合の数（通り）
$(0, 0)$	1	$\{1, 1, 1\}$	1
$(1, 0)$	2	$\{1, 1, 2\}$	3
$(2, 0)$	4	$\{1, 1, 4\}$, $\{1, 2, 2\}$	$3+3=6$
$(3, 0)$	8	$\{1, 2, 4\}$, $\{2, 2, 2\}$	$3!+1=7$
$(4, 0)$	16	$\{1, 4, 4\}$, $\{2, 2, 4\}$	$3+3=6$
$(5, 0)$	32	$\{2, 4, 4\}$	3
$(0, 1)$	5	$\{1, 1, 5\}$	3
$(1, 1)$	10	$\{1, 2, 5\}$	$3!=6$
$(2, 1)$	20	$\{1, 4, 5\}$, $\{2, 2, 5\}$	$3!+3=9$
$(3, 1)$	40	$\{2, 4, 5\}$	$3!=6$
$(4, 1)$	80	$\{4, 4, 5\}$	3
$(5, 1)$	160	なし	0
計			53（通り）

4.

(1)　X_1 は底面が半径 AC$(=2)$ の円，高さが AE$(=1)$ の円柱であるから

$$V_1=\pi \mathrm{AC}^2\cdot \mathrm{AE}$$
$$=\pi\cdot 2^2\cdot 1$$
$$=4\pi \qquad \cdots\cdots(答)$$

X_2 は底面が半径 AH$(=\sqrt{3})$ の円，高さが AB$(=\sqrt{2})$ の円柱であるから

$$V_2=\pi \mathrm{AH}^2\cdot \mathrm{AB}$$
$$=\pi\cdot(\sqrt{3})^2\cdot\sqrt{2}$$
$$=3\sqrt{2}\,\pi \qquad \cdots\cdots(答)$$

(2)　平面 $x=t$ $(0<t<1)$ と線分 EF の共有点を P とする。x 軸上に点 T$(t,\ 0,\ 0)$ をとると，

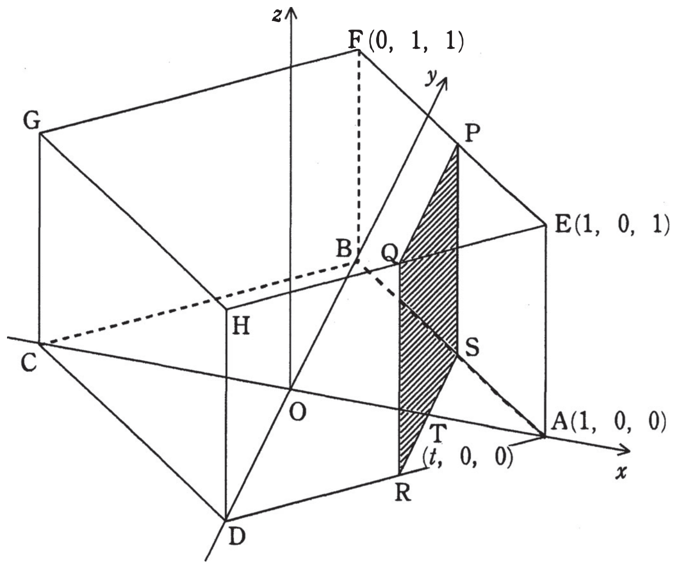
$$\mathrm{FP}:\mathrm{PE}=\mathrm{OT}:\mathrm{TA}=t:(1-t)$$

であるから $\overrightarrow{\mathrm{FP}}=t\overrightarrow{\mathrm{FE}}$ であり

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\overrightarrow{\mathrm{OF}}+t\overrightarrow{\mathrm{FE}}$$
$$=(0,1,1)+t\,(1,-1,0)$$
$$=(t,1-t,1)$$

（これは $t=0,\ 1$ のときも成り立つ）

ゆえに　$\mathrm{P}(t,1-t,1)$ $\cdots\cdots$(答)



(3)　平面 $x=t$ $(0\leqq t<1)$ と線分 EH，AD，AB の共有点を順に Q,R,S とおくと，平面 $x=t$ による直方体の切り口は長方形 PQRS である。

長方形 PQRS を点 T のまわりに 1 回転してできる図形は，TP $=$ TQ より，点 T を中心とした半径 TP の円とその内部となる。(これは $t=1$ のときも成り立つ)

この円の面積を $S(t)$ とおくと，

$$S(t)=\pi \mathrm{TP}^2$$
$$=\pi\{(1-t)^2+1^2\}$$
$$=\pi(t^2-2t+2)$$

また，X_3 は平面 $x=0$ に関して対称であるから

$$V_3=2\int_0^1 S(t)\,dt$$
$$=2\pi\int_0^1(t^2-2t+2)dt$$
$$=2\pi\left[\frac{1}{3}t^3-t^2+2t\right]_0^1$$
$$=\frac{8}{3}\pi \qquad \cdots\cdots(答)$$

5.

(1)

$\dfrac{1}{1+u^2}$ は偶関数であるから,

$$f(x)=\frac{1}{2}\int_{-x}^{x}\frac{1}{1+u^2}du=\int_0^x\frac{1}{1+u^2}du$$

$u=\tan\theta$ とおくと, $du=\dfrac{1}{\cos^2\theta}d\theta$

$0 \leqq \alpha < \dfrac{\pi}{2}$ であるから, u と θ の対応は

u	$0 \longrightarrow \tan\alpha$
θ	$0 \longrightarrow \alpha$

となる.

よって,

$$\begin{aligned}f(\tan\alpha)&=\int_0^{\tan\alpha}\frac{1}{1+u^2}du=\int_0^{\alpha}\frac{1}{1+\tan^2\theta}\cdot\frac{1}{\cos^2\theta}d\theta\\&=\int_0^{\alpha}\cos^2\theta\cdot\frac{1}{\cos^2\theta}d\theta=\int_0^{\alpha}d\theta=\Big[\,\theta\,\Big]_0^{\alpha}\\&=\boldsymbol{\alpha}\ \cdots\cdots(\text{答})\end{aligned}$$

(2)

$0 \leqq x \leqq 1,\ 0 \leqq y \leqq 1$ より, $0 \leqq \beta \leqq \dfrac{\pi}{4},\ 0 \leqq \gamma \leqq \dfrac{\pi}{4}$ を満たす $\beta,\ \gamma$ を用いて,

$x=\tan\beta,\ y=\tan\gamma$ とおける.

(1) より, $f(x)=f(\tan\beta)=\beta,\ f(y)=f(\tan\gamma)=\gamma,\ f(1)=f\left(\tan\dfrac{\pi}{4}\right)=\dfrac{\pi}{4}$ であるから,

$f(x)+f(y) \leqq f(1)$ より,

$$\beta+\gamma \leqq \frac{\pi}{4}$$

$\beta \geqq 0,\ \gamma \geqq 0$ より,

$$0 \leqq \beta+\gamma \leqq \frac{\pi}{4}\ \cdots\cdots①$$

したがって,

$$0 \leqq \tan(\beta+\gamma) \leqq 1 \Longleftrightarrow 0 \leqq \frac{\tan\beta+\tan\gamma}{1-\tan\beta\tan\gamma} \leqq 1 \Longleftrightarrow 0 \leqq \frac{x+y}{1-xy} \leqq 1$$

① から $(\beta,\ \gamma) \neq \left(\dfrac{\pi}{4},\ \dfrac{\pi}{4}\right)$ より, $(x,\ y) \neq (1,\ 1)$ であり,

$0 \leqq x \leqq 1,\ 0 \leqq y \leqq 1$ より, $1-xy>0$ であるから,

$$0 \leqq x+y \leqq 1-xy$$

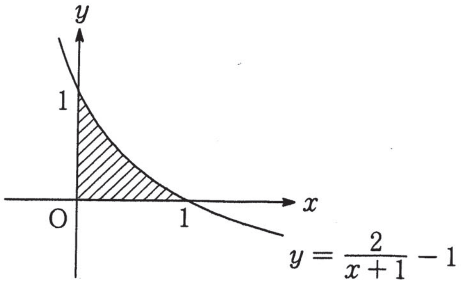
$x \geqq 0,\ y \geqq 0$ より, つねに $x+y \geqq 0$ は成り立つ.

$$x+y \leqq 1-xy \Longleftrightarrow (x+1)(y+1) \leqq 2$$

$x \geqq 0$ より, $x+1>0$ であるから,

$$y \leqq \frac{2}{x+1}-1\ \cdots\cdots②$$

$0 \leqq x \leqq 1$ かつ $0 \leqq y \leqq 1$ かつ ② の表す領域は図の斜線部 (境界線を含む).



$\cdots\cdots$(答)

また, この領域の面積は,

$$\int_0^1 \left(\frac{2}{x+1} - 1\right) dx = \Big[2\log|x+1| - x\Big]_0^1$$
$$= \mathbf{2\log 2 - 1} \quad \cdots\cdots(答)$$