2024年度 神戸大学 前期 数学 文系

1．

(1)　$y=\frac{1}{3}x^3-10x$ より

$$y'=x^2-10$$
$$=(x+\sqrt{10})(x-\sqrt{10})$$

よって，y の $x\geqq 0$ における増減は次の通り．

x	0	$\cdots$	$\sqrt{10}$	$\cdots$
y'		$-$	0	$+$
y	0	↘	極小	↗

ゆえに，y は $x=\sqrt{10}$ で最小値をとるので

$a_1=\sqrt{10}$　……(答)

したがって

$$b_1=\log_{10}a_1$$
$$=\log_{10}10^{\frac{1}{2}}$$
$$=\frac{1}{2}$$　……(答)

(2)　$y=\frac{1}{3}x^3-10a_nx$ より

$$y'=x^2-10a_n$$
$$=(x+\sqrt{10a_n})(x-\sqrt{10a_n})$$

$a_n>0$ より，y の $x\geqq 0$ における増減は次の通り．

x	0	$\cdots$	$\sqrt{10a_n}$	$\cdots$
y'		$-$	0	$+$
y	0	↘	極小	↗

ゆえに，y は $x=\sqrt{10a_n}$ で最小値をとるので

$a_{n+1}=\sqrt{10a_n}$　……(答)

(3)　(2) より

$$\log_{10}a_{n+1}=\log_{10}\sqrt{10a_n}$$
$$=\frac{1}{2}\log_{10}10a_n$$
$$=\frac{1}{2}(\log_{10}10+\log_{10}a_n)$$
$$=\frac{1}{2}\log_{10}a_n+\frac{1}{2}$$

よって

$b_{n+1}=\frac{1}{2}b_n+\frac{1}{2}$　……(答)

(4) (3) より

$$b_{n+1}-1=\frac{1}{2}(b_n-1)$$

よって，数列 $\{b_n-1\}$ は初項 b_1-1，公比 $\frac{1}{2}$ の等比数列をなすので

$$b_n-1=(b_1-1)\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

(1) より，$b_1=\frac{1}{2}$ であるから

$$b_n=1-\frac{1}{2^n} \quad \cdots\cdots(答)$$

(5) (4) より

$$\log_{10}a_n=1-\frac{1}{2^n}$$

$$\therefore\ a_n=10^{1-\frac{1}{2^n}}$$

よって

$$a_2=10^{1-\frac{1}{4}}=10^{\frac{3}{4}}$$

$$a_3=10^{1-\frac{1}{8}}=10^{\frac{7}{8}}$$

これらと (1) より

$$\frac{a_1a_2a_3}{100}=\frac{10^{\frac{1}{2}}\cdot 10^{\frac{3}{4}}\cdot 10^{\frac{7}{8}}}{10^2}=10^{\frac{1}{2}+\frac{3}{4}+\frac{7}{8}-2}=10^{\frac{1}{8}} \quad \cdots\cdots(答)$$

2．

（1） 1 個のサイコロを投げて出た目が必ず n の約数となるのは，n が 1, 2, 3, 4, 5, 6 の公倍数となるときである．最小のものはそれらの最小公倍数である．求める最小の n は

$n = 2^2 \cdot 3 \cdot 5 = \mathbf{60}$ ……(答)

（2） 1 個のサイコロを投げて出た目が n の約数となる確率が $\frac{5}{6}$ であるような n の約数の候補は，次の 6 つの場合である．（1）と同様に考えて，

- 1, 2, 3, 4, 5 のとき，最小公倍数は 60
- 1, 2, 3, 4, 6 のとき，最小公倍数は 12
- 1, 2, 3, 5, 6 のとき，最小公倍数は 30
- 1, 2, 4, 5, 6 のとき，最小公倍数は 60
- 1, 3, 4, 5, 6 のとき，最小公倍数は 60
- 2, 3, 4, 5, 6 のとき，最小公倍数は 60

12 の約数は 1, 2, 3, 4, 6 であり条件をみたす．

求める最小の n は $n = \mathbf{12}$ ……(答)

（3） サイコロの目の出方は全部で 6^3 通りある．

20 の約数は 1, 2, 4, 5, 10, 20 である．3 回サイコロを投げて，出た目の積を X とする．

（ア） $X = 1$ のとき．

出た目の組は $\{1, 1, 1\}$ のみで，1 通り．

（イ） $X = 2$ のとき．

出た目の組は $\{1, 1, 2\}$ のみで，3 通り．

（ウ） $X = 4$ のとき．

出た目の組は $\{1, 1, 4\}$, $\{1, 2, 2\}$ で，$3 + 3 = 6$ 通り．

（エ） $X = 5$ のとき．

出た目の組は $\{1, 1, 5\}$ のみで，3 通り．

（オ） $X = 10$ のとき．

出た目の組は $\{1, 2, 5\}$ のみで，$3! = 6$ 通り．

（カ） $X = 20$ のとき．

出た目の組は $\{2, 2, 5\}$, $\{1, 4, 5\}$ で，$3 + 3! = 9$ 通り．

よって，出た目の積が 20 の約数となるのは

$1 + 3 + 6 + 3 + 6 + 9 = 28$ 通り

あるから，求める確率は

$\frac{28}{6^3} = \mathbf{\frac{7}{54}}$ ……(答)

3．

（1）C と ℓ_1 より

$$ax^2+bx+c=-3x+3$$

$$ax^2+(b+3)x+(c-3)=0 \quad \cdots①$$

$a \fallingdotseq 0$ より ① は x についての2次方程式であり，ℓ_1 が C に接するので，① は重解をもち，(判別式)$=0$

$$(b+3)^2-4a(c-3)=0 \quad \cdots②$$

また，C と ℓ_2 より

$$ax^2+bx+c=x+3$$

$$ax^2+(b-1)x+(c-3)=0 \quad \cdots③$$

上と同様にして，③ は重解をもち，(判別式)$=0$

$$(b-1)^2-4a(c-3)=0 \quad \cdots④$$

② − ④ より，$8b+8=0 \qquad \therefore\ b=-1$

これを ② に代入して，$4-4a(c-3)=0 \qquad \therefore\ c=\dfrac{1}{a}+3$

以上より，$\boldsymbol{b=-1,\ c=\dfrac{1}{a}+3}$ ……(答)

（2）C が x 軸と異なる2点で交わるとき，2次方程式 $ax^2+bx+c=0$ は異なる2つの実数解をもち，

(判別式)>0

$$b^2-4ac>0$$

（1）の結果より，$(-1)^2-4a\left(\dfrac{1}{a}+3\right)>0$

$$a<-\frac{1}{4}$$

$\therefore\ \boldsymbol{-4<\dfrac{1}{a}<0}$ ……(答)

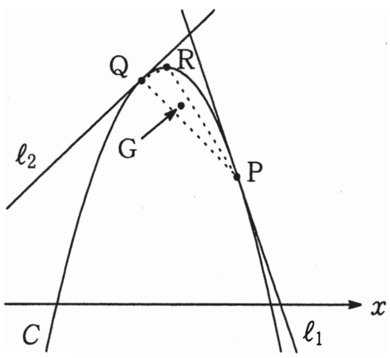
（3）（1）の結果より，① は

$$ax^2+2x+\frac{1}{a}=0$$

$$a\left(x+\frac{1}{a}\right)^2=0$$

$$x=-\frac{1}{a}$$

よって，$\mathrm{P}\left(-\dfrac{1}{a},\ \dfrac{3}{a}+3\right)$



また，② は

$$ax^2-2x+\frac{1}{a}=0$$

$$a\left(x-\frac{1}{a}\right)^2=0$$

$$x=\frac{1}{a}$$

よって，$\mathrm{Q}\left(\dfrac{1}{a},\ \dfrac{1}{a}+3\right)$

また，$C: y=ax^2-x+\dfrac{1}{a}+3=a\left(x-\dfrac{1}{2a}\right)^2+\dfrac{3}{4a}+3$ より，$\mathrm{R}\left(\dfrac{1}{2a},\ \dfrac{3}{4a}+3\right)$

$\mathrm{G}(X,\ Y)$ とおくと

$$\begin{cases} X = \dfrac{-\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{2a}}{3} = \dfrac{1}{6a} \ \cdots ⑤ \\ Y = \dfrac{\left(\dfrac{3}{a}+3\right)+\left(\dfrac{1}{a}+3\right)+\left(\dfrac{3}{4a}+3\right)}{3} = \dfrac{\dfrac{19}{4a}+9}{3} = \dfrac{19}{12a}+3 \ \cdots ⑥ \end{cases}$$

⑤ より，$\dfrac{1}{a} = 6X \ \cdots$ ⑤′

⑤′ を ⑥ に代入して a を消去すると

$$Y = \frac{19}{2}X + 3 \ \cdots ⑦$$

一方，(2) より $-4 < \dfrac{1}{a} < 0$ なので，これと ⑤′ より

$$-4 < 6X < 0$$

$$-\frac{2}{3} < X < 0 \ \cdots ⑧$$

以上より，求める軌跡は ⑦ かつ ⑧ を満たす点 (X, Y) 全体の集合，つまり

直線 $y = \dfrac{19}{2}x + 3$ の $-\dfrac{2}{3} < x < 0$ の部分 ……(答)