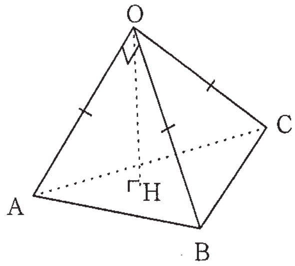
2024年度 京都大学 前期 数学 文系

$\boxed{1}$



$\angle COA = \angle COB = \angle ACB = \theta$ とおく．$\triangle OAC \equiv \triangle OBC$ だから $AC = BC = x$ とおいて余弦定理を用いると

$$x^2 = 1^2 + 1^2 - 2 \cdot 1^2 \cdot \cos\theta$$

$$\therefore \quad x^2 = 2(1-\cos\theta) \cdots\cdots ①$$

$AB = \sqrt{2}$ だから，$\triangle ABC$ について余弦定理を用いると

$$\left(\sqrt{2}\right)^2 = x^2 + x^2 - 2x^2 \cdot \cos\theta$$

$$2 = 2x^2 - 2x^2\cos\theta$$

$$\therefore \quad x^2(1-\cos\theta) = 1$$

これと①より

$$2(1-\cos\theta)^2 = 1 \qquad \therefore \quad 1-\cos\theta = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

よって①とあわせて

$$x^2 = \sqrt{2},\ \cos\theta = 1 - \frac{1}{\sqrt{2}}$$

これより

$$\sin\theta = \sqrt{1 - \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2} = \sqrt{\frac{2\sqrt{2}-1}{2}}$$

O から平面 ABC に下ろした垂線の足を H とする．$OA = OB = OC$ より H は $\triangle ABC$ の外心である．$\triangle ABC$ について正弦定理より

$$\frac{AB}{\sin\theta} = 2AH \qquad \therefore \quad AH = \frac{1}{\sqrt{2\sqrt{2}-1}}$$

よって

$$OH = \sqrt{OA^2 - AH^2} = \sqrt{\frac{2\sqrt{2}-2}{2\sqrt{2}-1}}$$

したがって，求める体積は

$$\frac{1}{3} \cdot \triangle ABC \cdot OH = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot x^2 \cdot \sin\theta \cdot OH$$

$$= \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{\frac{2\sqrt{2}-1}{2}} \cdot \sqrt{\frac{2\sqrt{2}-2}{2\sqrt{2}-1}}$$

$$= \boldsymbol{\frac{1}{6}\sqrt{2\sqrt{2}-2}}$$

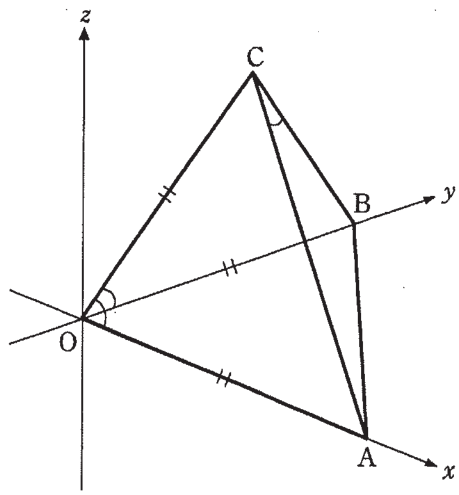
……（答）

$\boxed{1}$ 別解

OA$=$OB$=1$, $\angle$AOB$=90^\circ$ より

$$A(1,\ 0,\ 0),\ B(0,\ 1,\ 0),\ C(x,\ y,\ z)\ (z>0)$$

となるように座標軸を定めることができる.



このとき, OC$=1$ より

$$x^2+y^2+z^2=1 \quad \cdots\cdots ①$$

$\angle$COA$=\angle$COB$=\angle$ACB$=\theta$ $(0^\circ<\theta<180^\circ)$ とおくと

$$\begin{cases} \overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OC}=|\overrightarrow{OA}||\overrightarrow{OC}|\cos\theta & \cdots\cdots ② \\ \overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC}=|\overrightarrow{OB}||\overrightarrow{OC}|\cos\theta & \cdots\cdots ③ \\ \overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}=|\overrightarrow{CA}||\overrightarrow{CB}|\cos\theta & \cdots\cdots ④ \end{cases}$$

② より

$$x=\cos\theta$$

③ より

$$y=\cos\theta$$

よって, $\cos\theta=t$ とおくと, ① より

$$2t^2+z^2=1 \quad \cdots\cdots ①'$$

また

$$\overrightarrow{CA}=(1-t,\ -t,\ -z)$$

$$\overrightarrow{CB}=(-t,\ 1-t,\ -z)$$

ゆえに, ④ より

$$(1-t)(-t)+(-t)(1-t)+(-z)(-z)=\{(1-t)^2+(-t)^2+(-z)^2\}\cdot t$$

$$2t^2-2t+z^2=(2t^2-2t+1+z^2)t$$

$$1-2t=(2-2t)t \qquad [\because ①']$$

$$2t^2-4t+1=0$$

$$\therefore\ t=\frac{2-\sqrt{2}}{2} \qquad [\because 0^\circ<\theta<180^\circ \text{ より}, -1<t<1]$$

したがって, ①′ より

$$z^2=2\sqrt{2}-2$$

$$\therefore\ z=\sqrt{2\sqrt{2}-2}$$

また

$$\triangle OAB=\frac{1}{2}OA\cdot OB$$

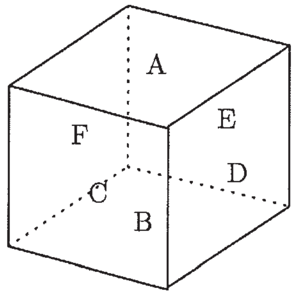
$$=\frac{1}{2}$$

よって, 求める体積は

$$\frac{1}{3}\cdot\triangle OAB\cdot z=\frac{\sqrt{2\sqrt{2}-2}}{6} \quad \cdots\cdots(\text{答})$$

$\boxed{2}$

以下, 図のように立方体の各面をそれぞれ A, B, C, D, E, F とする.



(1)　立方体の 6 面を 3 色で塗る方法は 3^6 通りである.

立方体の各面を 3 個の異なる色で塗るとき, A と B を異なる色で塗ると, 辺を共有するどの二つの面にも異なる色が塗られるように塗ることはできない.

よって, A と B は同じ色で塗らなければならないから, (A, B) の塗り方は 3 通り.

残りの面について

C の塗り方は 2 通り, (D, E, F) の塗り方は 1 通り

したがって, 求める確率は

$$p_3 = \frac{3 \cdot 2 \cdot 1}{3^6} = \frac{2}{243} \quad \cdots\cdots(\text{答})$$

(2)　立方体の 6 面を 4 色で塗る方法は 4^6 通りである.

A と B を同じ色で塗るか否かで場合分けを行う.

(I)　A と B を同じ色で塗るとき

(A, B) の塗り方は 4 通り, C の塗り方は 3 通り, D の塗り方は 2 通り

E, F の塗り方は

E と C を同じ色で塗るときは, F の塗り方は 2 通り

E と C を異なる色で塗るときは, (E, F) の塗り方は 1 通り

よって, (I) の場合の塗り方は　$4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot (2+1) = 72$(通り)

(II)　A と B を異なる色で塗るとき

A の塗り方は 4 通り, B の塗り方は 3 通り, C の塗り方は 2 通り, (D, E, F) の塗り方は 1 通り

よって, (II) の場合の塗り方は　$4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$(通り)

(I), (II) より, 求める確率は

$$p_4 = \frac{72 + 24}{4^6} = \frac{3}{128} \quad \cdots\cdots(\text{答})$$

$\boxed{3}$

$$f(x)=\left|x^2-\left(ax+\frac{3}{4}a^2\right)\right|+ax+\frac{3}{4}a^2$$

$$x^2-\left(ax+\frac{3}{4}a^2\right)=\left(x+\frac{a}{2}\right)\left(x-\frac{3}{2}a\right)$$

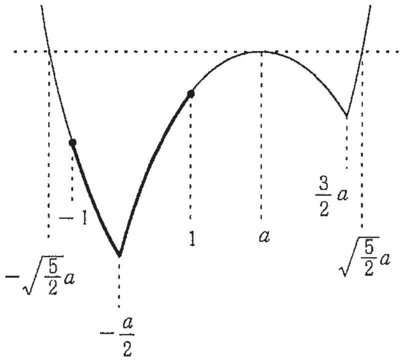
であり，$a>0$ であることに注意すると

$$f(x)=\begin{cases} x^2-\left(ax+\frac{3}{4}a^2\right)+ax+\frac{3}{4}a^2 & \left(x\leqq -\frac{a}{2},\ \frac{3}{2}a\leqq x\right) \\ -x^2+\left(ax+\frac{3}{4}a^2\right)+ax+\frac{3}{4}a^2 & \left(-\frac{a}{2}\leqq x\leqq \frac{3}{2}a\right) \end{cases}$$

$$=\begin{cases} x^2 & \left(x\leqq -\frac{a}{2},\ \frac{3}{2}a\leqq x\right) \\ -(x-a)^2+\frac{5}{2}a^2 & \left(-\frac{a}{2}\leqq x\leqq \frac{3}{2}a\right) \end{cases}$$

$-1\leqq x\leqq 1$ における $f(x)$ の最大値を M とする．

$-1\leqq -\frac{a}{2}$ かつ $1\leqq a$，つまり $1\leqq a\leqq 2$ のとき



$$f(1)-f(-1)$$
$$=\left(-1+2a+\frac{3}{2}a^2\right)-1$$
$$=\frac{1}{2}(a+2)(3a-2)>0$$

が成立することに注意して，

$$M=\begin{cases} f(1) & (1\leqq a) \\ f(a) & \left(\sqrt{\frac{2}{5}}\leqq a\leqq 1\right) \\ f(\pm 1) & \left(0<a\leqq \sqrt{\frac{2}{5}}\right) \end{cases}$$

$$=\begin{cases} \boldsymbol{\frac{3}{2}a^2+2a-1} & \boldsymbol{(1\leqq a)} \\ \boldsymbol{\frac{5}{2}a^2} & \boldsymbol{\left(\sqrt{\frac{2}{5}}\leqq a\leqq 1\right)} \\ \boldsymbol{1} & \boldsymbol{\left(0<a\leqq \sqrt{\frac{2}{5}}\right)} \end{cases}$$ ……**(答)**

$\boxed{4}$

求める自然数を N とし，N を八進法，九進法，十進法で表したときの桁数を n とすると

$$8^{n-1} \leqq N < 8^n \quad \text{かつ} \quad 9^{n-1} \leqq N < 9^n \quad \text{かつ} \quad 10^{n-1} \leqq N < 10^n$$

が成り立ち，$8^{n-1} \leqq 9^{n-1} \leqq 10^{n-1}$，$8^n < 9^n < 10^n$ であるから，

$$10^{n-1} \leqq N < 8^n \cdots\cdots ①$$

が成り立つ。

これを満たす N が存在する条件は

$$10^{n-1} < 8^n$$

であり，両辺の常用対数をとると

$$n-1 < n\log_{10} 8$$

$\log_{10} 8 = \log_{10} 2^3 = 3\log_{10} 2$ であるから

$$n-1 < 3n\log_{10} 2 \qquad \therefore\ (1-3\log_{10} 2)n < 1$$

$0.3010 < \log_{10} 2 < 0.3011 \cdots ②$ より，$1-3\log_{10} 2 > 0$ であるから

$$n < \frac{1}{1-3\log_{10} 2} \cdots\cdots ③$$

ここで，②より

$$0.0967 < 1-3\log_{10} 2 < 0.097 \quad \therefore\ \frac{1}{0.097} < \frac{1}{1-3\log_{10} 2} < \frac{1}{0.0967}$$

$$\therefore\ 10+\frac{30}{97} < \frac{1}{1-3\log_{10} 2} < 10+\frac{330}{967}$$

であるから，③を満たす自然数 n の最大値は $n=10$ であり，このとき ① は

$$10^9 \leqq N < 8^{10}$$

となるから，これをを満たす最大の自然数 N は

$$N = 8^{10}-1 = 2^{30}-1 \quad \cdots\cdots(\text{答})$$

(参考)

$$N = 2^{30}-1 = (2^{10})^3-1 = 1024^3-1 = 1073741823 = 2684381780_{(9)} = 7777777777_{(8)}$$

$\boxed{5}$

C と $y=ax+b$ が2つの異なる共有点をもつ条件は

「$x^2-(4+a)x+5-b=0$

が $x>1$ に異なる2つの実数解をもつこと」(*)

である．$f(x)=x^2-(4+a)x+5-b$ とおくと，$a>0$ より

軸：$x=\dfrac{4+a}{2}>1$

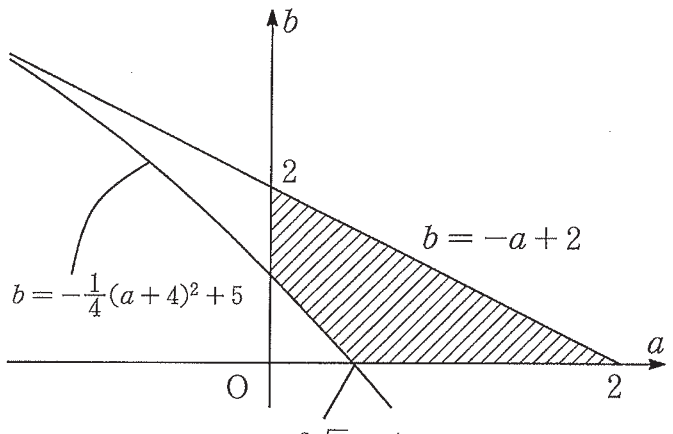
であるから，(*) より

$f(1)=-b-a+2>0$ かつ $(4+a)^2-4(5-b)>0$

つまり，

$-\dfrac{1}{4}(a+4)^2+5<b<-a+2$

これと $a>0,\ b>0$ より，$(a,\ b)$ の動く領域は，次の図の境界を除く斜線部である．



したがって，求める面積は

$$\frac{1}{2}\cdot2\cdot2-\int_0^{2\sqrt{5}-4}\left\{-\frac{1}{4}(a+4)^2+5\right\}da$$

$$=2-\left[-\frac{1}{12}(a+4)^3+5a\right]_0^{2\sqrt{5}-4}$$

$$=2+\frac{1}{12}\{(2\sqrt{5})^3-4^3\}-5(2\sqrt{5}-4)$$

$$=\frac{50-20\sqrt{5}}{3}$$

……(答)