2024年度 九州大学 前期 数学 理系

〔1〕

(1) $a \neq \pm 1$ のとき，3点 P , Q , R が一直線上にあると仮定すると，
$\overrightarrow{\mathrm{PR}} = k\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$ を満たす実数 k が存在する．
ここで $\overrightarrow{\mathrm{PR}} = (a+1,\, a^2-1,\, a^3+1)$, $\overrightarrow{\mathrm{PQ}} = (2,\, 0,\, 2)$ であるから

$$\begin{cases} a+1 = 2k & \cdots ① \\ a^2 - 1 = 0 & \cdots ② \\ a^3 + 1 = 2k & \cdots ③ \end{cases}$$

$a \neq \pm 1$ のとき ② は成立しないから，① , ② , ③ を同時に満たす a , k は存在しない．
よって，$a \neq \pm 1$ のとき，3点 P , Q , R は一直線上にない． …… (証明終わり)

(2) 点 R から直線 PQ に下ろした垂線と PQ との交点を H とおく．$\left|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}\right| = 2\sqrt{2}$ で一定であるから，△PQR の面積が最大になるのは $\left|\overrightarrow{\mathrm{RH}}\right|$ が最大のときである．
H は PQ 上にあるから，$\overrightarrow{\mathrm{PH}} = t\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$ とおくと

$$\overrightarrow{\mathrm{OH}} = \overrightarrow{\mathrm{OP}} + t\overrightarrow{\mathrm{PQ}} = (-1,\, 1,\, -1) + t\,(2,\, 0,\, 2) = (2t-1,\, 1,\, 2t-1)$$

$$\therefore\ \overrightarrow{\mathrm{RH}} = \overrightarrow{\mathrm{OH}} - \overrightarrow{\mathrm{OR}} = (2t-1-a,\, 1-a^2,\, 2t-1-a^3)$$

$\overrightarrow{\mathrm{PQ}} \perp \overrightarrow{\mathrm{RH}}$ より $\overrightarrow{\mathrm{PQ}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{RH}} = 2(2t-1-a) + 2(2t-1-a^3) = 0$

$$8t - 2a^3 - 2a - 4 = 0 \qquad \therefore\ t = \frac{1}{4}(a^3+a+2)$$

このとき $\overrightarrow{\mathrm{RH}} = \left(\frac{1}{2}(a^3+a+2) - 1 - a,\, 1-a^2,\, \frac{1}{2}(a^3+a+2) - 1 - a^3\right)$

$= \left(\frac{1}{2}a^3 - \frac{1}{2}a,\, 1-a^2,\, -\frac{1}{2}a^3 + \frac{1}{2}a\right)$ となり

$$\left|\overrightarrow{\mathrm{RH}}\right|^2 = \frac{1}{4}(a^3-a)^2 + (1-a^2)^2 + \frac{1}{4}(-a^3+a)^2$$

$$= \frac{1}{4}(a^6 - 2a^4 + a^2) \times 2 + a^4 - 2a^2 + 1 = \frac{1}{2}a^6 - \frac{3}{2}a^2 + 1$$

$f(a) = \frac{1}{2}a^6 - \frac{3}{2}a^2 + 1 \ (-1 < a < 1)$ とおくと
$f'(a) = 3a^5 - 3a = 3a(a^2+1)(a^2-1)$
$f'(a) = 0$ とおくと $-1 < a < 1$ より $a = 0$

a	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	1
$f'(a)$		$+$	0	$-$	
$f(a)$		$\nearrow$	1	$\searrow$	

よって $f(a)$ は $a = 0$ のとき最大値 1 をとるから，
$\left|\overrightarrow{\mathrm{RH}}\right|$ の最大値は 1 である．
したがって △PQR の面積の最大値は

$$\frac{1}{2} \times 2\sqrt{2} \times 1 = \sqrt{2}$$ …… (答)

(注) $\triangle\mathrm{PQR} = \frac{1}{2}\sqrt{\left|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}\right|^2\left|\overrightarrow{\mathrm{PR}}\right|^2 - \left(\overrightarrow{\mathrm{PQ}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{PR}}\right)^2}$ を用いて計算すると，少々煩雑になるが同じ結果を得る．

©駿台予備学校

〔2〕

(1) $\quad f(z)=0$

$\Leftrightarrow \quad z^6+z^4+z^2+1=0$

$\Leftrightarrow \quad z^4(z^2+1)+(z^2+1)=0$

$\Leftrightarrow \quad (z^4+1)(z^2+1)=0$

$\Leftrightarrow \quad (z+\alpha)(z-\alpha)(z+\alpha^3)(z-\alpha^3)(z+i)(z-i)=0$

$$\left(\text{ただし,}\ \alpha=\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)$$

$\Leftrightarrow \quad z=\pm i,\ \pm\alpha,\ \pm\alpha^3$

であり,

$$|\pm i|=1,\ |\pm\alpha|=1,\ |\pm\alpha^3|=|\alpha|^3=1$$

だから $f(z)=0$ をみたすすべての複素数 z に対して, $|z|=1$ が成り立つ. □

(2) 「$f(z)=0$ をみたすすべての複素数 z に対して $f(wz)=0$」 $\quad\cdots(*)$

が成り立つとき, 特に $z=i$ として

$\quad f(wi)=0$

$\Leftrightarrow \quad wi=\pm i,\ \pm\alpha,\ \pm\alpha^3 \quad (\because (1))$

$\Leftrightarrow \quad w=\pm 1,\ \pm\alpha,\ \pm\alpha^3$

が必要である.

- $w=1$ のとき

  $f(z)=0$ をみたすすべての複素数 z に対して

  $$f(wz)=f(z)=0$$

  となり, (*) が成り立つ.

- $w=-1$ のとき

  $f(z)=0$ をみたすすべての複素数 z に対して

  $$f(wz)=f(-z)=f(z)=0$$

  となり, (*) が成り立つ.

- $w=\alpha$ のとき, $z=\alpha^3$ とすると

  $$f(wz)=f(\alpha\cdot\alpha^3)=f(\alpha^4)=f(-1)=4\neq 0$$

  となり, (*) は成り立たない.

- $w=-\alpha$ のとき, $z=-\alpha^3$ とすると

  $$f(wz)=f((-\alpha)\cdot(-\alpha^3))=f(\alpha^4)=f(-1)=4\neq 0$$

  となり, (*) は成り立たない.

- $w=\alpha^3$ のとき, $z=\alpha$ とすると

  $$f(wz)=f(\alpha^3\cdot\alpha)=f(\alpha^4)=f(-1)=4\neq 0$$

  となり, (*) は成り立たない.

©駿台予備学校

・ $w=-\alpha^3$ のとき, $z=-\alpha$ とすると

$$f(wz)=f((-\alpha^3)\cdot(-\alpha))=f(\alpha^4)=f(-1)=4\neq 0$$

となり, (*) は成り立たない.

以上から, 求める複素数 w は

$$w=\pm 1 \quad \cdots(答)$$

©駿台予備学校

〔3〕

(1) a と b は自然数かつ $a<b$ のとき，$a \leqq b-1$ である。よって，

$$\frac{b!}{a!} \geqq \frac{b!}{(b-1)!} = b$$

よって，(左辺) $\geqq$ (右辺) が示された。 **(証明終わり)**

(2) $a<b$ かつ $b!=2a!$ のとき，(1) より，

$$b! \geqq b \cdot a! \quad \Leftrightarrow \quad 2a! \geqq b \cdot a! \quad \Leftrightarrow \quad 2 \geqq b$$

が必要である。

いま，a, b が $a<b$ を満たす自然数なので，$b \geqq 2$ である。

よって，$b=2$ に限られ，$a=1$ に限られる。逆に，$(a,\ b)=(1,\ 2)$ のとき，

$$2! = 2 \cdot 1!$$

は成立する。以上より，

$$\boldsymbol{(a,\ b) = (1,\ 2)}$$ ……**(答)**

(3) a, b の大小で場合分けを行う。

(i) $a \neq b$ のとき

$a<b$ として一般性を失わない。$a!+b!=2c!$ のとき

$$\cdot\ a!+b! < b!+b! \quad \Leftrightarrow \quad 2c! < 2b! \quad \Leftrightarrow \quad c<b$$

$$\cdot\ a!+b! > a!+a! \quad \Leftrightarrow \quad 2c! > 2a! \quad \Leftrightarrow \quad c>a$$

が必要である。$a!+b!=2c!$ かつ $c<b$ のとき，(1) より，

$$a!+b! \geqq a!+b \cdot c! \quad \Leftrightarrow \quad 2c! \geqq a!+b \cdot c! \quad \Leftrightarrow \quad (2-b)c! \geqq a! \quad \cdots\cdots ①$$

が必要である。一方，a, b, c が $a<c<b$ を満たす自然数なので，$b \geqq 3$ である。

よって，① を満たす $(a,\ b,\ c)$ は存在しない。

(ii) $a=b$ のとき

$$a!+b! = 2c! \quad \Leftrightarrow \quad 2a! = 2c! \quad \Leftrightarrow \quad a=c$$

よって，$a=b=c$ が必要十分である。

(i), (ii) より，$\boldsymbol{a=b=c}$ **を満たす任意の自然数** ……**(答)**

©駿台予備学校

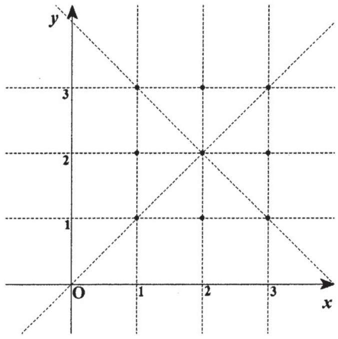
〔4〕

(1) 右図のように条件を満たす直線は, x 軸に平行なものが 3 個,

y 軸に平行なものが 3 個, それ以外のものが 2 個あるから,

$$L(3) = 3 + 3 + 2 = \mathbf{8}$$

である.



(2) 条件を満たす直線は, (1) で求めた $L(3)$ 個以外に

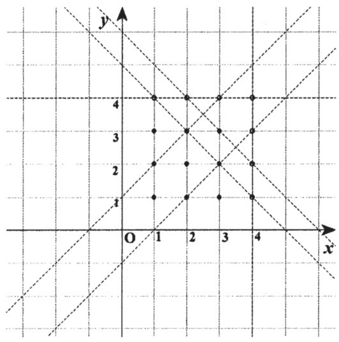
右図のように, 領域 $\begin{cases} 1 \leqq x \leqq 3 \\ 1 \leqq y \leqq 3 \end{cases}$ に含まれる格子点と

2 個の共有点を持つものが 3 個, 1 個の共有点を持つものが 1 個,

0 個の共有点を持つものが 2 個あるから,

$$L(4) = L(3) + 3 + 1 + 2 = \mathbf{14}$$

である.



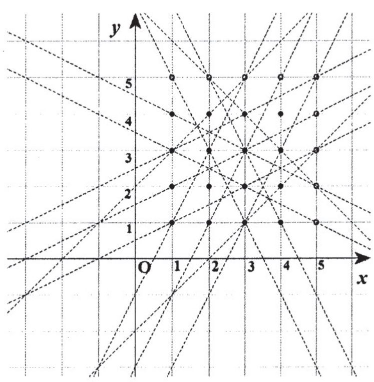
(3) 条件を満たす直線は, (2) で求めた $L(4)$ 個以外に

下図 (A), (B), (C) のように, 領域 $\begin{cases} 1 \leqq x \leqq 4 \\ 1 \leqq y \leqq 4 \end{cases}$ に含まれる格子点と (A) 2 個の共有点を持つものが 13 個, (B) 1 個の共有点を持つものが 3 個, (C) 0 個の共有点を持つものが 2 個あるから,

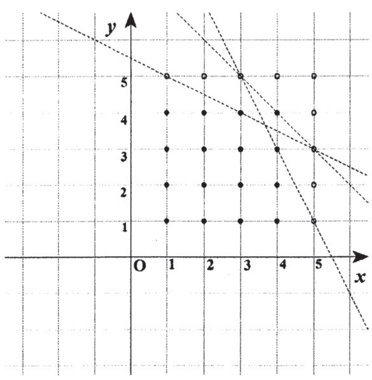
$$L(5) = L(4) + 13 + 3 + 2 = \mathbf{32}$$

である.

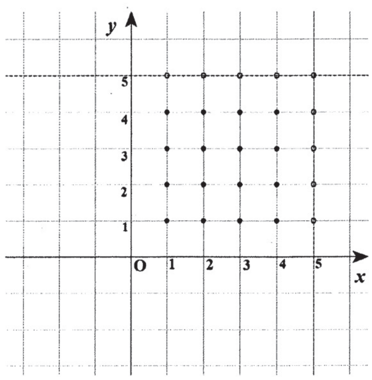
(A)



(B)



(C)



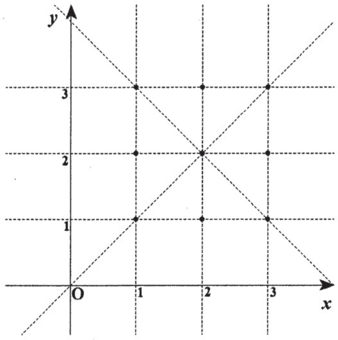
©駿台予備学校

(別解)

(1) 右図のように, 条件を満たす直線は, x 軸に平行なものが 3 個, y 軸に平行なものが 3 個, それ以外には, 傾きが 1 のものと傾きが -1 のものがそれぞれ 1 個ずつあり, 他にはないから

$$L(3)=3+3+1+1=\mathbf{8}$$

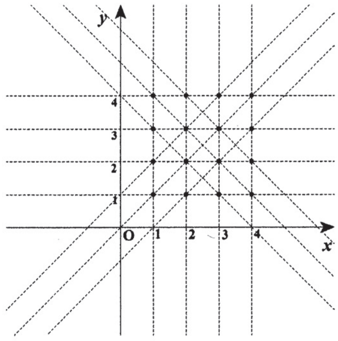
である.



(2) 右図のように, 条件を満たす直線は, x 軸に平行なものが 4 個, y 軸に平行なものが 4 個, それ以外には, 傾きが 1 のものとが傾きが -1 のものがそれぞれ 3 個ずつあり, 他にはないから

$$L(4)=4+4+3+3=\mathbf{14}$$

である.

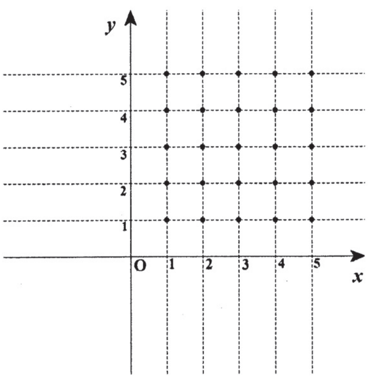


(3) 下図 (A), (B), (C) のように, 条件を満たす直線は, (A) 座標軸のいずれかに平行なものが $5\cdot 2=10$ 個, (B) 傾きが 1 または -1 であるものが $5\cdot 2=10$ 個, (C) 傾きが$\dfrac{1}{2}$または$\dfrac{-1}{2}$または 2 または -2 であるものが $3\cdot 4=12$ 個あり, 他にはないから

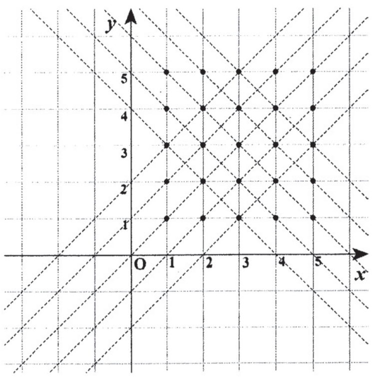
$$L(5)=10+10+12=\mathbf{32}$$

である.

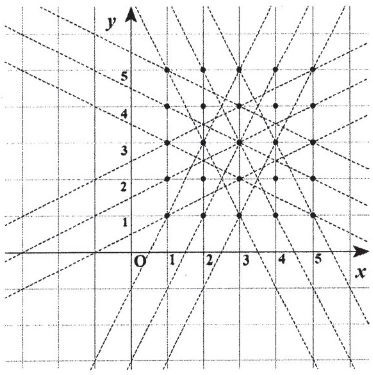
(A)



(B)



(C)



©駿台予備学校

[5]

（1） $I(m+1, n+1)$

$$=\int_1^e x^{m+1}e^x(\log x)^{n+1}dx$$

$$=\int_1^e e^x\left\{x^{m+1}(\log x)^{n+1}\right\}dx$$

$$=\Big[\ e^x x^{m+1}(\log x)^{n+1}\ \Big]_1^e-\int_1^e e^x\left\{(m+1)x^m(\log x)^{n+1}+(n+1)x^m(\log x)^n\right\}dx$$

$$=e^e e^{m+1}-(m+1)\int_1^e x^m e^x(\log x)^{n+1}dx-(n+1)\int_1^e x^m e^x(\log x)^n dx$$

$$=e^{e+m+1}-(m+1)I(m, n+1)-(n+1)I(m, n)\quad \cdots\cdots(\text{答})$$

別解 $I(m, n+1)$

$$=\int_1^e x^m e^x(\log x)^{n+1}dx$$

$$=\left[\ \frac{1}{m+1}x^{m+1}e^x(\log x)^{n+1}\ \right]_1^e-\int_1^e\left\{\frac{1}{m+1}x^{m+1}e^x(\log x)^{n+1}+\frac{n+1}{m+1}x^m e^x(\log x)^n\right\}dx$$

$$=\frac{1}{m+1}e^{m+1}e^e-\frac{1}{m+1}\int_1^e x^{m+1}e^x(\log x)^{n+1}dx-\frac{n+1}{m+1}\int_1^e x^m e^x(\log x)^n dx$$

$$\therefore\quad I(m, n+1)=\frac{1}{m+1}e^{m+1+e}-\frac{1}{m+1}I(m+1, n+1)-\frac{n+1}{m+1}I(m, n)$$

両辺に $m+1$ を掛けて $I(m+1, n+1)$ について解くと，

$$I(m+1, n+1)=e^{m+1+e}-(m+1)I(m, n+1)-(n+1)I(m, n)\quad \cdots\cdots(\text{答})$$

（2）（証明）$1\leqq x\leqq e$ のとき

$$x^m e^x(\log x)^n\geqq 0$$

であるから

$$\int_1^e x^m e^x(\log x)^n dx\geqq 0$$

である．よって $I(m, n)\geqq 0$ であり，同様にして，$I(m, n+1)\geqq 0$, $I(m+1, n+1)\geqq 0$ であることに注意し，（1）の結果を用いると

$$0\leqq I(m, n)=\frac{1}{n+1}\left\{e^{e+m+1}-(m+1)I(m, n+1)-I(m+1, n+1)\right\}\leqq\frac{1}{n+1}e^{e+m+1}$$

ここで，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}e^{e+m+1}=0$ となるので，はさみうちの原理により，すべての自然数 m に対して

$$\lim_{n\to\infty}I(m, n)=0$$

が成り立つ．

（証明終わり）

©駿台予備学校