2024年度 九州大学 前期 数学 文系

〔1〕

$$C_1 : y = 2x^2 \quad \cdots\cdots ①$$

$$C_2 : y = 2x^2 - 8x + 16 \quad \cdots\cdots ②$$

(1) ① を x について微分すると　$y' = 4x$

l と C_1 の接点の座標を $(a, 2a^2)$ とすると，l は

$$y - 2a^2 = 4a(x - a)$$

すなわち　$l : y = 4ax - 2a^2$　$\cdots\cdots ③$

②, ③ から y を消去すると

$$2x^2 - 8x + 16 = 4ax - 2a^2$$

式を整理して　$x^2 - 2(a+2)x + a^2 + 8 = 0$　$\cdots\cdots ④$

l は C_2 にも接するから，④ の判別式を D とおくと，$D = 0$ である．

よって　$D/4 = (a+2)^2 - (a^2 + 8) = 0$

これを解くと　$a = 1$

③ に代入して　$y = 4x - 2$　$\cdots$(答)　$\cdots\cdots ⑤$

(2) C_1 と l の接点の x 座標は，① と ⑤ から y を消去することにより

$$2x^2 = 4x - 2$$

これを解いて　$x = 1$

同様にして，C_2 と l の接点の x 座標は，② と ⑤ から y を消去することにより

$$2x^2 - 8x + 16 = 4x - 2$$

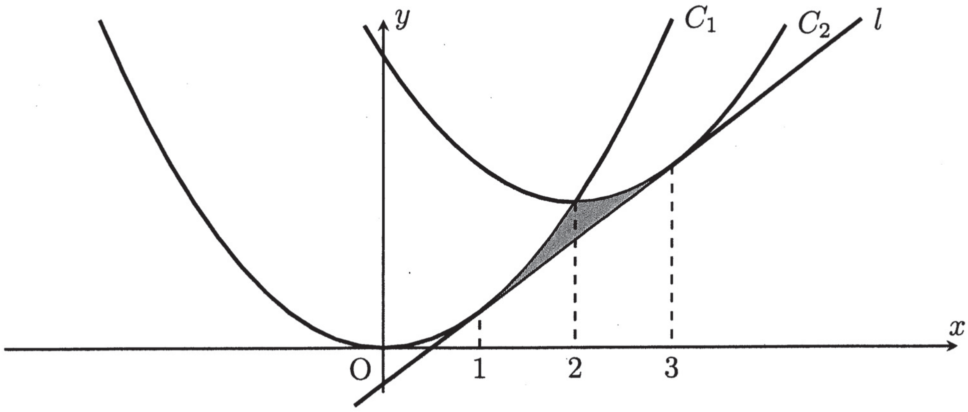
これを解いて　$x = 3$

さらに同様にして，C_1 と C_2 の交点の x 座標は，① と ② から y を消去することにより

$$2x^2 = 2x^2 - 8x + 16$$

これを解いて　$x = 2$ である．

よって，2 つの放物線 C_1, C_2 と直線 l で囲まれた図形は，下図の塗布部分である．



よって，求める面積を S とおくと

$$
\begin{aligned}
S &= \int_1^2 \{2x^2 - (4x-2)\}dx + \int_2^3 \{2x^2 - 8x + 16 - (4x-2)\}dx \\
&= 2\int_1^2 (x-1)^2 dx + 2\int_2^3 (x-3)^2 dx \\
&= 2\left[\frac{1}{3}(x-1)^3\right]_1^2 + 2\left[\frac{1}{3}(x-3)^3\right]_2^3 \\
&= \frac{4}{3} \quad \cdots (\text{答})
\end{aligned}
$$

〔2〕

(1) $B(x,\ y)(x>0,\ y>0)$ とおくと，$|\overrightarrow{OB}|=\sqrt{10}$ より，

$$x^2+y^2=10 \quad \cdots\cdots ①$$

である。また，$\overrightarrow{OA}\perp\overrightarrow{AB}$ より $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{AB}=0$ であるから，

$$(2,\ 1)\cdot(x-2,\ y-1)=0$$

$$\Leftrightarrow 2\cdot(x-2)+1\cdot(y-1)=0 \quad \therefore y=-2x+5 \quad \cdots\cdots ②$$

である。②を①に代入して，

$$x^2+(-2x+5)^2=10$$

$$\Leftrightarrow 5x^2-20x+15=0$$

$$\Leftrightarrow x^2-4x+3=0$$

$$\Leftrightarrow (x-1)(x-3)=0 \quad \therefore x=1,\ 3$$

②と $x>0$，$y>0$ より，

$$(x,\ y)=(1,\ 3)$$

よって，

$$B(1,\ 3) \quad \cdots\cdots(答)$$

である。

(2) $\overrightarrow{OC}=s\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{OB}$ より $\overrightarrow{OC}=(2s+t,\ s+3t)$ であるから，

$$\triangle OAC=\frac{1}{2}\left|2\cdot(s+3t)-1\cdot(2s+t)\right|=\frac{5}{2}|t|=\frac{5}{2}t\ (t>0)$$

$$\triangle OBC=\frac{1}{2}\left|1\cdot(s+3t)-3\cdot(2s+t)\right|=\frac{5}{2}|s|=\frac{5}{2}s\ (s>0)$$

$\triangle OAC=\triangle OBC$ より，$t=s$ である。

$\overrightarrow{OC}=(3s,\ 4s)$ と $|\overrightarrow{OC}|=4$ より，

$$25s^2=16\Leftrightarrow s^2=\frac{16}{25} \quad \therefore s=\frac{4}{5}\ (s>0)$$

よって，

$$s=t=\frac{4}{5} \quad \cdots\cdots(答)$$

である。

参考

$\overrightarrow{OA}=(x_1,\ y_1)$，$\overrightarrow{OC}=(x_2,\ y_2)$ のとき，$\triangle OAC=\frac{1}{2}\left|x_1y_2-x_2y_1\right|$ である。

$\triangle OAC=\frac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{OA}|^2|\overrightarrow{OC}|^2-(\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OC})^2}$ を使ってもよいが少し計算が面倒になる。

〔3〕

(1) a と b は自然数かつ $a<b$ のとき，$a \leqq b-1$ である。よって，

$$\frac{b!}{a!} \geqq \frac{b!}{(b-1)!} = b$$

よって，(左辺) $\geqq$ (右辺) が示された。 **(証明終わり)**

(2) $a<b$ かつ $b!=2a!$ のとき，(1) より，

$$b! \geqq b\cdot a! \quad \Leftrightarrow \quad 2a! \geqq b\cdot a! \quad \Leftrightarrow \quad 2 \geqq b$$

が必要である。

いま，a, b が $a<b$ を満たす自然数なので，$b \geqq 2$ である。

よって，$b=2$ に限られ，$a=1$ に限られる。逆に，$(a,\ b)=(1,\ 2)$ のとき，

$$2! = 2\cdot 1!$$

は成立する。以上より，

$$\boldsymbol{(a,\ b)=(1,\ 2)}$$ ……**(答)**

(3) a, b の大小で場合分けを行う。

(i) $a \neq b$ のとき

$a<b$ として一般性を失わない。$a!+b!=2c!$ のとき

$$\cdot\ a!+b! < b!+b! \quad \Leftrightarrow \quad 2c! < 2b! \quad \Leftrightarrow \quad c<b$$

$$\cdot\ a!+b! > a!+a! \quad \Leftrightarrow \quad 2c! > 2a! \quad \Leftrightarrow \quad c>a$$

が必要である。$a!+b!=2c!$ かつ $c<b$ のとき，(1) より，

$$a!+b! \geqq a!+b\cdot c! \quad \Leftrightarrow \quad 2c! \geqq a!+b\cdot c! \quad \Leftrightarrow \quad (2-b)c! \geqq a! \quad \cdots\cdots ①$$

が必要である。一方，a, b, c が $a<c<b$ を満たす自然数なので，$b \geqq 3$ である。

よって，① を満たす $(a,\ b,\ c)$ は存在しない。

(ii) $a=b$ のとき

$$a!+b!=2c! \quad \Leftrightarrow \quad 2a!=2c! \quad \Leftrightarrow \quad a=c$$

よって，$a=b=c$ が必要十分である。

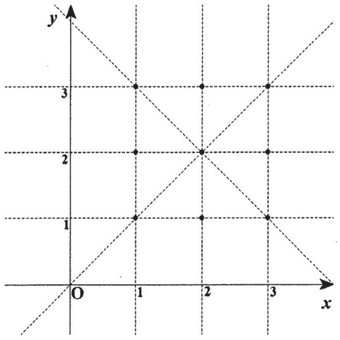
(i), (ii) より，$\boldsymbol{a=b=c}$ **を満たす任意の自然数** ……**(答)**

〔4〕

(1) 右図のように条件を満たす直線は, x 軸に平行なものが 3 個, y 軸に平行なものが 3 個, それ以外のものが 2 個あるから,

$$L(3) = 3 + 3 + 2 = \mathbf{8}$$

である.



(2) 条件を満たす直線は, (1) で求めた $L(3)$ 個以外に

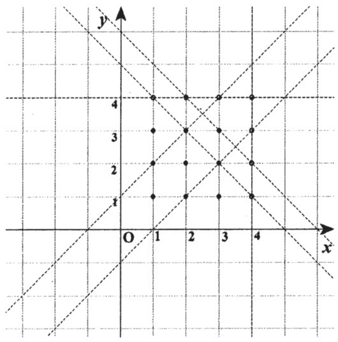
右図のように, 領域 $\begin{cases} 1 \leqq x \leqq 3 \\ 1 \leqq y \leqq 3 \end{cases}$ に含まれる格子点と

2 個の共有点を持つものが 3 個, 1 個の共有点を持つものが 1 個,

0 個の共有点を持つものが 2 個あるから,

$$L(4) = L(3) + 3 + 1 + 2 = \mathbf{14}$$

である.



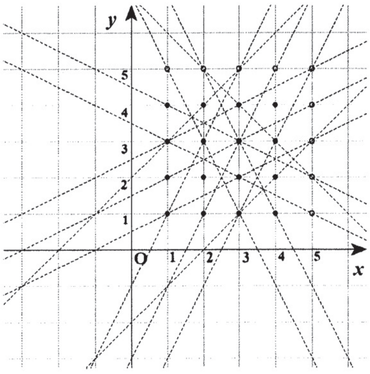
(3) 条件を満たす直線は, (2) で求めた $L(4)$ 個以外に

下図 (A), (B), (C) のように, 領域 $\begin{cases} 1 \leqq x \leqq 4 \\ 1 \leqq y \leqq 4 \end{cases}$ に含まれる格子点と (A) 2 個の共有点を持つものが 13 個, (B) 1 個の共有点を持つものが 3 個, (C) 0 個の共有点を持つものが 2 個あるから,

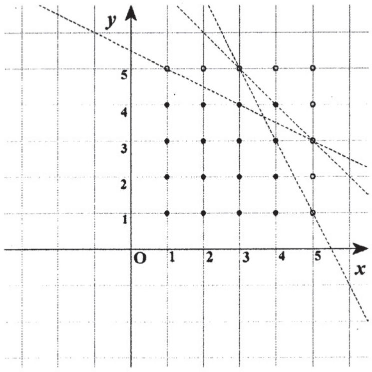
$$L(5) = L(4) + 13 + 3 + 2 = \mathbf{32}$$

である.

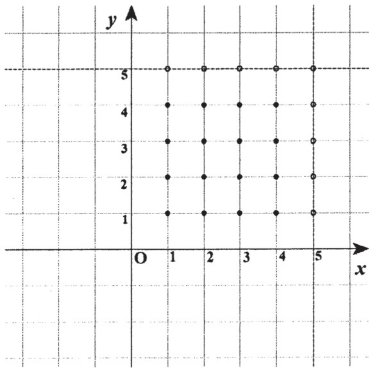
(A)



(B)



(C)

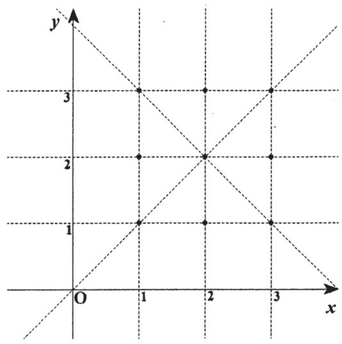


(別解)

(1) 右図のように, 条件を満たす直線は, x 軸に平行なものが 3 個, y 軸に平行なものが 3 個, それ以外には, 傾きが 1 のものと傾きが -1 のものがそれぞれ 1 個ずつあり, 他にはないから

$$L(3) = 3 + 3 + 1 + 1 = \mathbf{8}$$

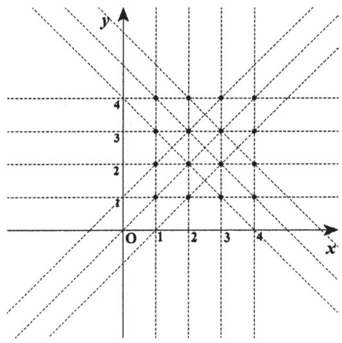
である.



(2) 右図のように, 条件を満たす直線は, x 軸に平行なものが 4 個, y 軸に平行なものが 4 個, それ以外には, 傾きが 1 のものとが傾きが -1 のものがそれぞれ 3 個ずつあり, 他にはないから

$$L(4) = 4 + 4 + 3 + 3 = \mathbf{14}$$

である.

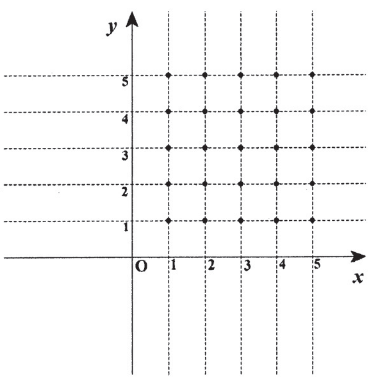


(3) 下図 (A), (B), (C) のように, 条件を満たす直線は, (A) 座標軸のいずれかに平行なものが $5 \cdot 2 = 10$ 個, (B) 傾きが 1 または -1 であるものが $5 \cdot 2 = 10$ 個, (C) 傾きが $\frac{1}{2}$ または $\frac{-1}{2}$ または 2 または -2 であるものが $3 \cdot 4 = 12$ 個あり, 他にはないから

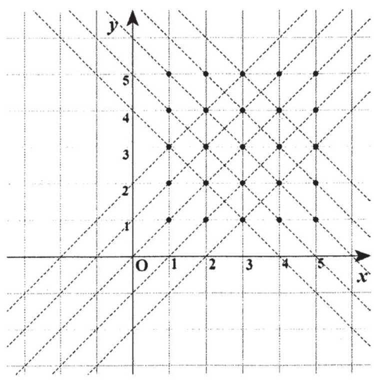
$$L(5) = 10 + 10 + 12 = \mathbf{32}$$

である.

(A)



(B)



(C)