2024年度 名古屋大学 前期 数学 理系

1

（1）　$f(x)=\sqrt{x}+\dfrac{2}{\sqrt{x}}$

$$f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}-\frac{1}{x\sqrt{x}}=\frac{x-2}{2x\sqrt{x}}$$

$f(x)$ は表のように増減する．

x	(0)	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$		$-$	0	$+$
$f(x)$		↘		↗

$$f(2)=\sqrt{2}+\frac{2}{\sqrt{2}}=2\sqrt{2}$$

極小値は $\boldsymbol{2\sqrt{2}}$，極大値はなし　……(答)

（2）　$y=f(x)$ 上の点 $(p,\ f(p))\ (p>0)$ における接線の方程式は

$$y=f'(p)(x-p)+f(p)$$

$$y=\frac{p-2}{2p\sqrt{p}}(x-p)+\sqrt{p}+\frac{2}{\sqrt{p}}$$

$$y=\frac{p-2}{2p\sqrt{p}}x+\frac{p+6}{2\sqrt{p}}$$

点 $\mathrm{P}(t,\ 0)$ から C にちょうど 2 本の接線が引ける条件は

$$0=\frac{p-2}{2p\sqrt{p}}t+\frac{p+6}{2\sqrt{p}}\quad\cdots\cdots ①$$

をみたす正の実数 p がちょうど 2 つ存在することである．① を整理して

$$(p-2)t+p(p+6)=0\quad\cdots\cdots ②$$

$p=2$ では成立しないので，$p\neq 2$ である．

$$t=-\frac{p(p+6)}{p-2}$$

$g(p)=-\dfrac{p(p+6)}{p-2}\ (p>0,\ p\neq 2)$ とおく．

$$g'(p)=-\frac{(2p+6)(p-2)-(p^2+6p)}{(p-2)^2}$$

$$=-\frac{p^2-4p-12}{(p-2)^2}=-\frac{(p-6)(p+2)}{(p-2)^2}$$

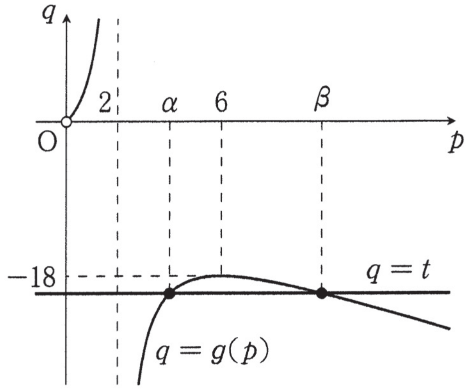
$g(p)$ は表のように増減する．

p	(0)	$\cdots$	(2)	$\cdots$	6	$\cdots$
$g'(p)$		$+$		$+$	0	$-$
$g(p)$		↗		↗		↘

$$\lim_{p\to+0}g(p)=0,\ \lim_{p\to\infty}g(p)=-\infty,$$

$$\lim_{p\to 2-0}g(p)=+\infty,\ \lim_{p\to 2+0}g(p)=-\infty$$

であることに注意して，$q=g(p)$ のグラフの概形を描くと次のようになる．



①をみたす正の実数 p がちょうど 2 つ存在する条件は，$q=g(p)$ のグラフと直線 $q=t$ が異なる 2 つの共有点をもつことであり，

$$\boldsymbol{t<-18} \quad \cdots\cdots(答)$$

である．

（3）（2）のグラフから，$\alpha=3,\,4,\,5$ のいずれかに限られる．

また，②から

$$p^2+(t+6)p-2t=0$$

の解が $\alpha,\,\beta$ であるから，

$$\alpha+\beta=-(t+6),\ \alpha\beta=-2t \quad \cdots\cdots ③$$

（ア） $\alpha=3$ のとき．

$$t=g(3)=-27$$

③より

$$\alpha+\beta=21,\ \alpha\beta=54$$

$\alpha=3$ より $\beta=18$

（イ） $\alpha=4$ のとき．

$$t=g(4)=-20$$

③より

$$\alpha+\beta=14,\ \alpha\beta=40$$

$\alpha=4$ より $\beta=10$

（ウ） $\alpha=5$ のとき．

$$t=g(5)=-\frac{55}{3}$$

このとき，$\alpha+\beta$ は整数にならないので不適．

以上より，$(\alpha,\,\beta)=\boldsymbol{(3,\,18),\,(4,\,10)}$ ……(答)

2

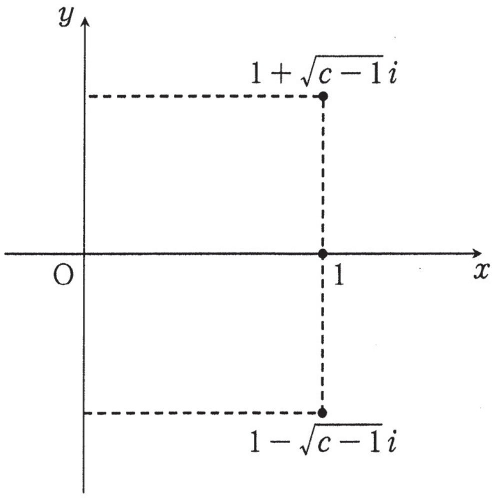
(1)
$$\begin{aligned} P(z) &= z^3 - 3z^2 + (c+2)z - c \\ &= \left(z^3 - 3z^2 + 2z\right) + c(z-1) \\ &= z(z-1)(z-2) + c(z-1) \\ &= (z-1)\left(z^2 - 2z + c\right) \end{aligned}$$

よって，$P(z) = 0$ の解は

$$z = 1,\, 1 \pm \sqrt{1-c}$$

$c > 1$ より

$$z = 1,\, 1 \pm \sqrt{c-1}\,i \quad \cdots\cdots(\text{答})$$



(2)
$$\alpha = \cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)$$

であり，$\alpha^4 = -1$ であるから

$$Q(z) = (\alpha z)^3 - 3(\alpha z)^2 + (c+2)(\alpha z) - c$$

より $Q(z) = P(\alpha z)$ となることから，$Q(z) = 0$ の解は (1) より $\alpha z = 1,\, 1 \pm \sqrt{c-1}\,i$ であり

$$\begin{aligned} z &= \frac{1}{\alpha},\ \frac{1 \pm \sqrt{c-1}\,i}{\alpha} \\ &= \cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4},\ \left(1 \pm \sqrt{c-1}\,i\right)\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right) \cdots ① \end{aligned}$$

ここで，$z_1 = 1$，$z_2 = 1 + \sqrt{c-1}\,i$，$z_3 = 1 - \sqrt{c-1}\,i$ として，$\mathrm{A}(z_1)$，$\mathrm{B}(z_2)$，$\mathrm{C}(z_3)$ とし，3 点 A, B, C を原点のまわりに $\frac{\pi}{4}$ 回転させた点をそれぞれ A′, B′, C′とすると，これらの 3 点を表す複素数が①の 3 解である．3 点 A, B, C は実部がともに 1 であり一直線上にあることから，①の z のうち実部が最大のものは C′を表す複素数となり

$$\begin{aligned} z &= \left(1 - \sqrt{c-1}\,i\right)\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right) \\ &= \frac{\left(1 + \sqrt{c-1}\right) + \left(1 - \sqrt{c-1}\right)i}{\sqrt{2}} \quad \cdots\cdots(\text{答}) \end{aligned}$$

(3) $P(z) = 0$ と $Q(z) = 0$ が共通解を持つとき，3 点 A, B, C のいずれかと 3 点 A′, B′, C′のいずれかが一致する．

$|z_2| = |z_3| > 1 = |z_1|$ であるから，一致することができるのは B, C のいずれかと B′, C′のいずれかに限られ，B は第 1 象限，C は第 4 象限にあることから一致するのは B と C′となり

$$1 + \sqrt{c-1}\,i = \frac{\left(1 + \sqrt{c-1}\right) + \left(1 - \sqrt{c-1}\right)i}{\sqrt{2}}$$

$$\begin{cases} 1 = \dfrac{1 + \sqrt{c-1}}{\sqrt{2}} \\ \sqrt{c-1} = \dfrac{1 - \sqrt{c-1}}{\sqrt{2}} \end{cases} \qquad \therefore \sqrt{c-1} = \sqrt{2} - 1 \qquad \therefore c = 4 - 2\sqrt{2} \quad \cdots\cdots(\text{答})$$

このとき

$$\beta = 1 + \sqrt{c-1}\,i = 1 + \left(\sqrt{2} - 1\right)i \quad \cdots\cdots(\text{答})$$

$\boxed{3}$

(1) $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=(1,1,-1), \overrightarrow{AC}=\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA}=(1,-1,-2)$ より

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AB}=1\cdot1+1\cdot1+(-1)\cdot(-1)=3 \qquad \cdots\cdots(答)$$
$$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AC}=1\cdot1+(-1)\cdot(-1)+(-2)\cdot(-2)=6 \qquad \cdots\cdots(答)$$
$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=1\cdot1+1\cdot(-1)+(-1)\cdot(-2)=2 \qquad \cdots\cdots(答)$$

(2) 点 Q は平面 H 上の点であるから

$$\overrightarrow{AQ}=x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AC} \quad (x, y \text{ は実数})$$

と表せる.

このとき $\overrightarrow{OQ}=\overrightarrow{OA}+x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AC}$

また, OQ $\perp$ 平面 H より, $\overrightarrow{OQ}\perp\overrightarrow{AB}$ かつ $\overrightarrow{OQ}\perp\overrightarrow{AC}$ であるから

$$\begin{cases} \overrightarrow{OQ}\cdot\overrightarrow{AB}=0 & \cdots\cdots① \\ \overrightarrow{OQ}\cdot\overrightarrow{AC}=0 & \cdots\cdots② \end{cases}$$

① より

$$(\overrightarrow{OA}+x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AC})\cdot\overrightarrow{AB}=0$$
$$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{AB}+x\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=0$$

$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{AB}=3\cdot1+1\cdot1+3\cdot(-1)=1, \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AB}=3, \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=2$ であるから

$$1+3x+2y=0 \quad \cdots\cdots③$$

② より

$$(\overrightarrow{OA}+x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AC})\cdot\overrightarrow{AC}=0$$
$$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{AC}+x\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}+y\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AC}=0$$

$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{AC}=3\cdot1+1\cdot(-1)+3\cdot(-2)=-4, \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=2, \overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AC}=6$ であるから

$$-4+2x+6y=0 \quad \cdots\cdots④$$

③, ④ より $x=-1, y=1$

したがって $\overrightarrow{AQ}=-\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$ $\cdots\cdots$ (答)

(3) 点 X が線分 QP 上にあるとき

$$\overrightarrow{QX}=k\overrightarrow{QP} \quad (0\leqq k\leqq 1)$$

と表せる. このとき

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AX}&=(1-k)\overrightarrow{AQ}+k\overrightarrow{AP}\\ &=(1-k)(-\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})+k(s\overrightarrow{AB}+t\overrightarrow{AC})\\ &=\{(s+1)k-1\}\overrightarrow{AB}+\{(t-1)k+1\}\overrightarrow{AC}\end{aligned}$$

s は非負の実数より $0 < \dfrac{1}{s+1} \leqq 1$ であるから, $k = \dfrac{1}{s+1}$ とすれば

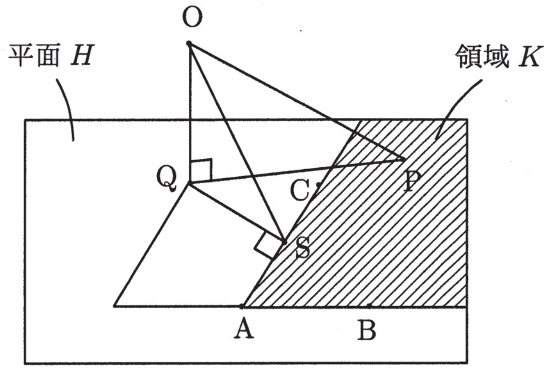
$$\overrightarrow{\mathrm{AX}} = \left(\frac{t-1}{s+1} + 1\right)\overrightarrow{\mathrm{AC}} = \frac{s+t}{s+1}\overrightarrow{\mathrm{AC}}$$

s, t は非負の実数より, $r = \dfrac{s+t}{s+1}$ とすれば, r は非負の実数であり

$$\overrightarrow{\mathrm{AX}} = r\overrightarrow{\mathrm{AC}} \quad (r \text{ は非負の実数})$$

ゆえに, 領域 K 上の点 P に対して, 線分 QR 上の点で $\overrightarrow{\mathrm{AR}} = r\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ (r は非負の実数) を満たす点 R が存在する. (証明終わり)

(4) 領域 K 内の点 P に対して



$$\mathrm{OP} = \sqrt{\mathrm{OQ}^2 + \mathrm{QP}^2}$$

OQ は一定であるから, QP が最小となるとき, OP は最小となる.
(3) の結果より, 領域 K 内の点 P に対して線分 QP は半直線 AC と交わるから, QP が最小となるのは, P が Q から半直線 AC に下ろした垂線の足となるときである.
このとき, P は半直線 AC 上にあるから

$$\overrightarrow{\mathrm{AP}} = u\overrightarrow{\mathrm{AC}} \quad (u \geqq 0)$$

と表せる.
また, $\overrightarrow{\mathrm{QP}} \perp \overrightarrow{\mathrm{AC}}$ より $\overrightarrow{\mathrm{QP}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AC}} = 0$ であるから $\quad (\overrightarrow{\mathrm{AP}} - \overrightarrow{\mathrm{AQ}}) \cdot \overrightarrow{\mathrm{AC}} = 0$
よって $\quad \overrightarrow{\mathrm{AP}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AC}} = \overrightarrow{\mathrm{AQ}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AC}}$
したがって

$$u\overrightarrow{\mathrm{AC}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AC}} = (-\overrightarrow{\mathrm{AB}} + \overrightarrow{\mathrm{AC}}) \cdot \overrightarrow{\mathrm{AC}} = -\overrightarrow{\mathrm{AB}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AC}} + \overrightarrow{\mathrm{AC}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AC}}$$

$\overrightarrow{\mathrm{AC}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AC}} = 6, \overrightarrow{\mathrm{AB}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AC}} = 2$ であるから $\quad 6u = -2 + 6$

よって $\quad u = \dfrac{2}{3}$

したがって, $\overrightarrow{\mathrm{AP}} = \dfrac{2}{3}\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ であるから

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \overrightarrow{\mathrm{OA}} + \frac{2}{3}\overrightarrow{\mathrm{AC}} = \left(\frac{11}{3}, \frac{1}{3}, \frac{5}{3}\right)$$

ゆえに, 領域 K において原点 O からの距離が最小となる点 S の座標は

$$\mathrm{S}\left(\frac{11}{3}, \frac{1}{3}, \frac{5}{3}\right)$$ ……(答)

$\boxed{4}$

(1) 試行を n 回行ったとき，赤玉をちょうど i $(i=0,\ 1,\ \cdots,\ n)$ 回取り出す確率 $P(i)$ は

$$P(i)={}_n\mathrm{C}_i\,p^i(1-p)^{n-i}=\frac{n!}{i!(n-i)!}p^i(1-p)^{n-i}$$

と表せる．試行を n 回行ったとき，赤玉を1回以上取り出す事象を A，赤玉を2回以上取り出す事象を B とする．このとき，A の余事象 $\overline{A}$ は赤玉を0回取り出す（取り出さない）ことであり，

$$\begin{aligned} f(1)&=1-P(0)\\ &=1-(1-p)^n \quad \cdots\cdots(\text{答}) \end{aligned}$$

である．また，B の余事象 $\overline{B}$ は赤玉を0回または1回取り出すことであり，

$$\begin{aligned} f(2)&=1-P(0)-P(1)\\ &=1-(1-p)^n-np(1-p)^{n-1} \quad \cdots\cdots(\text{答}) \end{aligned}$$

である．

(2) 試行を n 回行ったとき，赤玉を k 回以上取り出す確率 $f(k)$ は

$$f(k)=\sum_{i=k}^{n}P(i)$$

である．ここで，

$$a_k=\frac{n!}{(k-1)!(n-k)!}\int_0^p x^{k-1}(1-x)^{n-k}\,dx$$

として，$f(k)=a_k$ であることを示す．

（証明）

$k=n$ のとき

$$f(k)=P(n)=p^n$$

であり，

$$a_k=\frac{n!}{(n-1)!0!}\int_0^p x^{n-1}\,dx=\Big[\,x^n\,\Big]_0^p=p^n$$

であるから，$f(k)=a_k$ が成り立つ．

$k\leqq n-1$ のとき

$$\begin{aligned} a_k&=\frac{n!}{(k-1)!(n-k)!}\left\{\left[\,\frac{1}{k}x^k(1-x)^{n-k}\,\right]_0^p-\int_0^p\frac{1}{k}x^k(n-k)(1-x)^{n-k-1}(-1)\,dx\right\}\\ &=\frac{n!}{k!(n-k)!}p^k(1-p)^{n-k}+\frac{n!}{k!(n-k-1)!}\int_0^p x^k(1-x)^{n-k-1}\,dx\\ &=P(k)+a_{k+1} \end{aligned}$$

を満たす．これを繰り返し用いると，

$$\begin{aligned} a_k&=\sum_{i=k}^{n-1}P(i)+a_n\\ &=\sum_{i=k}^{n-1}P(i)+p^n\\ &=\sum_{i=k}^{n}P(i) \end{aligned}$$

が得られるから，$f(k)=a_k$ が成り立つ．　　（証明終わり）

(3) $p=\dfrac{1}{2}$ のとき，試行を $2k+1$ 回行い，赤玉を $k+1$ 回以上取り出す事象 C が起こる確率 q は

$$q=\sum_{i=k+1}^{2k+1}{}_{2k+1}\mathrm{C}_i\,p^i(1-p)^{2k+1-i}=\sum_{i=k+1}^{2k+1}{}_{2k+1}\mathrm{C}_i\left(\frac{1}{2}\right)^{2k+1}$$

と表せる．また，C の余事象 $\overline{C}$ は白玉を $k+1$ 回以上取り出すことでありその確率 $1-q$ は

$$1-q=\sum_{i=k+1}^{2k+1}{}_{2k+1}\mathrm{C}_i\,p^{2k+1-i}(1-p)^i=\sum_{i=k+1}^{2k+1}{}_{2k+1}\mathrm{C}_i\left(\frac{1}{2}\right)^{2k+1}$$

と表せる．したがって，

$$q=1-q \qquad \therefore\ q=\frac{1}{2}$$

と分かる．また (2) の結果を $n=2k+1$，$p=\frac{1}{2}$ として

$$q=f(k+1)=\frac{(2k+1)!}{k!\,k!}\int_0^{\frac{1}{2}}x^k(1-x)^k\,dx$$

と表せる．したがって，

$$\frac{(2k+1)!}{k!\,k!}\int_0^{\frac{1}{2}}x^k(1-x)^k\,dx=\frac{1}{2}$$

が成り立ち，

$$I=\frac{(k!)^2}{2(2k+1)!} \quad \cdots\cdots(\text{答})$$

と分かる．

(2) の別解

$b_k=\int_0^p x^{k-1}(1-x)^{n-k}\,dx$ とし，

$$f(k)=\frac{n!}{(k-1)!(n-k)!}b_k \cdots\cdots ①$$

が成り立つことを示す．

(証明)

$k=1$ のとき

$$\begin{aligned}\frac{n!}{(k-1)!(n-k)!}b_k&=nb_1\\&=n\int_0^p(1-x)^{n-1}\,dx\\&=\Big[-(1-x)^n\Big]_0^p\\&=1-(1-p)^n\\&=f(1)\end{aligned}$$

が得られるので，$k=1$ のとき ① が成り立つ．また，

$$\begin{aligned}b_{k+1}&=\int_0^p x^k(1-x)^{n-k-1}\,dx\\&=\left[x^k\cdot\frac{-1}{n-k}(1-x)^{n-k}\right]_0^p-\int_0^p kx^{k-1}\cdot\frac{-1}{n-k}(1-x)^{n-k}\,dx\\&=\frac{-1}{n-k}p^k(1-p)^{n-k}+\frac{k}{n-k}\int_0^p x^{k-1}(1-x)^{n-k}\,dx\\&=\frac{-1}{n-k}p^k(1-p)^{n-k}+\frac{k}{n-k}b_k\end{aligned}$$

を満たす．これより，

$$\frac{b_{k+1}}{k!(n-k-1)!}=\frac{b_k}{(k-1)!(n-k)!}-\frac{p^k(1-p)^{n-k}}{k!(n-k)!}$$

が成り立つ．これを繰り返し用いると，$k \geqq 2$ に対して

$$\begin{aligned}
\frac{b_k}{(k-1)!(n-k)!} &= \frac{b_1}{0!(n-1)!} - \sum_{i=1}^{k-1} \frac{p^i(1-p)^{n-i}}{i!(n-i)!} \\
&= \frac{1}{(n-1)!}\int_0^p (1-x)^{n-1}\,dx - \sum_{i=1}^{k-1} \frac{p^i(1-p)^{n-i}}{i!(n-i)!} \\
&= \frac{1}{(n-1)!}\left[-\frac{1}{n}(1-x)^n\right]_0^p - \sum_{i=1}^{k-1} \frac{p^i(1-p)^{n-i}}{i!(n-i)!} \\
&= -\frac{1}{n!}(1-p)^n + \frac{1}{n!} - \sum_{i=1}^{k-1} \frac{p^i(1-p)^{n-i}}{i!(n-i)!} \\
&= \frac{1}{n!} - \sum_{i=0}^{k-1} \frac{p^i(1-p)^{n-i}}{i!(n-i)!}
\end{aligned}$$

が得られる．したがって，

$$\begin{aligned}
\frac{n!}{(k-1)!(n-k)!}b_k &= \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!}\cdot(k-1)!(n-k)!\left\{\frac{1}{n!} - \sum_{i=0}^{k-1} \frac{p^i(1-p)^{n-i}}{i!(n-i)!}\right\} \\
&= 1 - \sum_{i=0}^{k-1} \frac{n!}{i!(n-i)!} p^i(1-p)^{n-i} \\
&= 1 - \sum_{i=0}^{k-1} P(i)
\end{aligned}$$

が成り立つ．ここで，赤玉を k 回以上取り出す事象の余事象は，赤玉を $k-1$ 回以下取り出すという事象であるから

$$f(k) = 1 - \sum_{i=0}^{k-1} P(i)$$

と表せる．以上より，

$$f(k) = \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!}\int_0^p x^{k-1}(1-x)^{n-k}\,dx$$

が成り立つ．　　　　（証明終わり）