2024年度 名古屋大学 前期 数学 文系

$\boxed{1}$

(1)　$P(x) = x^3 - 3x^2 - 50$ とすると

$$P(5) = 5^3 - 3 \cdot 5^2 - 50 = 5(25 - 15 - 10) = 0$$

よって，$P(x)$ は $x - 5$ を因数にもち，$P(x) = (x-5)(x^2 + 2x + 10)$

方程式は

$$(x-5)(x^2+2x+10) = 0$$

ここで，$x^2 + 2x + 10 = 0$ の判別式を D とすると $D/4 = 1^2 - 1 \cdot 10 < 0$

よって，$x^2 + 2x + 10 = 0$ は実数解をもたないから，求める実数解は　$x = 5$ ……(答)

(2)　$p + q = pq = X$ とおくと

$$p^3 + q^3 = (p+q)^3 - 3pq(p+q) = X^3 - 3X \cdot X = X^3 - 3X^2 \cdots\cdots \text{(答)}$$

(3)　$\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = \dfrac{p+q}{pq} = 1$ から　$p + q = pq$

(2) より $p + q = pq = X$ とおくと

$$p^3 + q^3 = X^3 - 3X^2 = 50$$

p，q は実数より，X が実数である。

(1) より $X^3 - 3X - 50 = 0$ の実数解は $X = 5$ であるので，$p + q = pq = 5$

p，q を解とする 2 次方程式は

$$x^2 - 5x + 5 = 0$$

$$x = \frac{5 \pm \sqrt{5}}{2}$$

$p < q$ より　$(p,\ q) = \left(\dfrac{5 - \sqrt{5}}{2},\ \dfrac{5 + \sqrt{5}}{2} \right)$ ……(答)

〔文 2〕

(1) 与えられた C の式の右辺を平方完成すると, $-\left(x-\frac{t}{2}\right)^2+\frac{t^2}{4}+t$ であるから, 点 P の座標は

$$\mathbf{P}\left(\boldsymbol{\frac{t}{2},\ \frac{t^2}{4}+t}\right) \quad \cdots\cdots\cdots\textbf{(答)}$$

である.

(2) (1) より, $t \neq 0$ のもと, 直線 l は存在して, その方程式は $y=\frac{t+4}{2}x$ であるから, l と C の共有点の x 座標は,

$$\frac{t+4}{2}x=-x^2+tx+t$$

つまり

$$\left(x-\frac{t}{2}\right)(x+2)=0\cdots\cdots\cdots ①$$

をみたす実数 x の値として求められる.よって, 点 Q の存在条件は, $t \neq 0$ かつ $\frac{t}{2} \neq -2$, つまり,

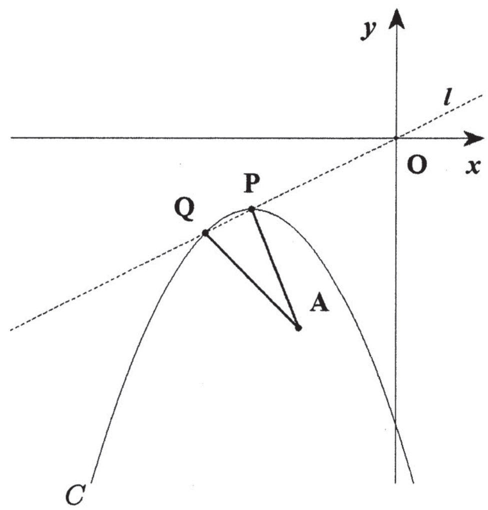
$$\boldsymbol{t \neq -4} \textbf{ かつ } \boldsymbol{t \neq 0} \quad \cdots\cdots\cdots\textbf{(答)}$$

である. このとき, ①より, 点 Q の座標は

$$\mathbf{Q(-2,\ -t-4)} \quad \cdots\cdots\cdots\textbf{(答)}$$

である.

(3) (1) より



$$\begin{aligned}\mathrm{AP}^2 &= \left(\frac{t}{2}+1\right)^2+\left(\frac{t^2}{4}+t+2\right)^2\\ &= \frac{t^2}{4}+t+1+\left(\frac{t^2}{4}+t+2\right)^2\\ &= X+1+(X+2)^2\\ &= X^2+5X+5\end{aligned}$$

であり, (2) より

$$\begin{aligned}\mathrm{AQ}^2 &= (-2+1)^2+(-t-4+2)^2\\ &= t^2+4t+5\\ &= 4X+5\end{aligned}$$

である.ゆえに,

$$\begin{aligned}\mathrm{AP}^2-\mathrm{AQ}^2 &= (X^2+5X+5)-(4X+5)\\ &= \boldsymbol{X^2+X} \quad \cdots\cdots\cdots\textbf{(答)}\end{aligned}$$

である. よって, AP $<$ AQ となる条件は,

$$X^2+X<0\cdots\cdots\cdots ②$$

である.

②を同値変形してゆくと

$$
\begin{aligned}
② &\iff X(X+1)<0 \\
&\iff -1<X<0 \\
&\iff -1<\frac{1}{4}t^2+t<0 \\
&\iff -4<t^2+4t<0 \\
&\iff \begin{cases} t^2+4t+4>0 \\ t^2+4t<0 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} (t+2)^2>0 \\ t(t+4)<0 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} t\neq -2 \\ -4<t<0 \end{cases} \qquad (\text{これは } t\neq 0, -4 \text{ を満たす.})
\end{aligned}
$$

となる. よって, $\mathrm{AP}<\mathrm{AQ}$ となるために t が満たすべき条件は

$$\boldsymbol{-4<t<-2} \textbf{ または } \boldsymbol{-2<t<0} \qquad \cdots\cdots\cdots\textbf{(答)}$$

である.

名古屋大学　文系 3（2024 年）

(1)　表が出る回数は$(n-r)$回であり

$$a_n = 2(n-r)+3r$$
$$= 2n+r \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

(2)　コインをn回投げたときの得点をS_nとする。

$S_n \neq 0$ となるのは $2n+r=2n+2$ より $r=2$

すなわち，n回のうち裏がちょうど2回出たときである。

ゆえに，$S_4 \neq 0$ となるのは，表と裏が2回ずつ出るときであり，その確率は

$${}_4\mathrm{C}_2\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{6}{16} = \frac{3}{8} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

次に，i回目，j回目 $(1 \leqq i < j \leqq 4)$ の2回だけ裏が出たときの得点を考える。

まず，4回とも表が出たときを考えると $a_k = 2k \quad (1 \leqq k \leqq 4)$ であり

$$S_4 = 2+4+6+8 = 20$$

この状態から，i回目を裏にすると，$i \leqq k \leqq 4$ をみたすa_kは1ずつ増加し，得点は

$$S_4 = 20+(5-i) = 25-i$$

さらにj回目を裏にすると，$j \leqq k \leqq 4$ をみたすa_kは1ずつ増加し，得点は

$$S_4 = 25-i+(5-j) = 30-(i+j)$$

ゆえに $S_4 = 25$ となるのは

$$30-(i+j) = 25$$
$$i+j = 5$$

これは，$(i,\ j) = (1,\ 4),\ (2,\ 3)$ の2つの場合であり，その確率は

$$2\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{2}{16} = \frac{1}{8} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

(参考)　i回目，j回目 $(1 \leqq i < j \leqq 4)$ の2回だけ裏が出たときの得点は以下のようになる。

$(i,\ j)$	a_1	a_2	a_3	a_4	S_4
(1, 2)	3	6	8	10	27
(1, 3)	3	5	8	10	26
(1, 4)	3	5	7	10	25
(2, 3)	2	5	8	10	25
(2, 4)	2	5	7	10	24
(3, 4)	2	4	7	10	23

以上より，$S_4 = 25$ となるのは $(i,\ j) = (1,\ 4),\ (2,\ 3)$ の2つの場合とわかる。

(3)　まず，9回とも表が出たときを考えると $a_k=2k\quad(1\leqq k\leqq 9)$ であり

$$S_9=2+4+6+\cdots+18=\frac{9}{2}(2+18)=90$$

i回目，j回目 $(1\leqq i<j\leqq 9)$ の2回だけ裏が出たときの得点は，(2)と同様にして考えると

$$S_9=90+(10-i)+(10-j)=110-(i+j)$$

ゆえに $S_9=100$ となるのは

$$110-(i+j)=100$$
$$i+j=10$$

これは，$(i,\ j)=(1,\ 9),\ (2,\ 8),\ (3,\ 7),\ (4,\ 6)$ の4つの場合であり，その確率は

$$4\left(\frac{1}{2}\right)^7\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{128}\qquad\cdots\cdots(答)$$

また，S_9が奇数となるのは，$i+j$ が奇数のとき，すなわち $i,\ j$の偶奇が異なる場合である。

このときの組$(i,\ j)$の個数は，1から9のうちの奇数と偶数を1つずつ選んで，小さい方をi，大きい方をjと考えればよく

$${}_5\mathrm{C}_1\cdot{}_4\mathrm{C}_1=5\cdot 4=20\ (組)$$

したがって，S_9が奇数となる確率は

$$20\left(\frac{1}{2}\right)^7\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{5}{128}\qquad\cdots\cdots(答)$$