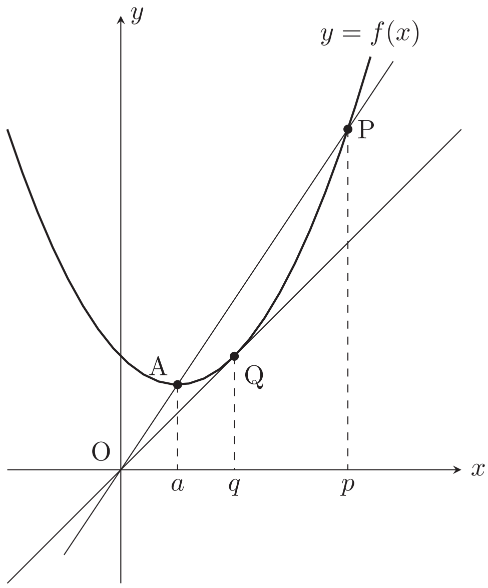
2024年度 東北大学 前期 数学 文系

1



(1) $f(x)=x^2-2ax+4a^2=(x-a)^2+3a^2$ より $\mathrm{A}(a,\ 3a^2)$ であるから，$a>0$ より直線 OA の方程式は

$$y=3ax$$

である．x の方程式 $f(x)=3ax$ の $x=a$ 以外の解が p であるから

$$x^2-2ax+4a^2=3ax$$
$$x^2-5ax+4a^2=0$$
$$(x-a)(x-4a)=0$$

より

$$p=4a \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

である．

原点を通り傾き m の直線 $y=mx$ が放物線 $y=f(x)$ と接するとき，x の 2 次方程式

$$x^2-(2a+m)x+4a^2=0$$

が重解を持つので

$$(2a+m)^2-16a^2=0 \quad \text{すなわち} \quad 2a+m=\pm 4a$$

が成り立つ．このとき，接点の x 座標 q は

$$q=\frac{2a+m}{2}$$

であり，$q>0$ であるから $2a+m>0$ である．$a>0$ に注意すると

$$2a+m=4a \quad \text{すなわち} \quad m=2a$$

であり

$$q=\frac{4a}{2}=2a \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

である．$a>0$ であるから，$4a>2a$，すなわち $p>q$ である．

(別解) q の値は，次のように考えて求めることもできる．

$f(x)=x^2-2ax+4a^2$ より $f'(x)=2x-2a$ であるから，$\mathrm{Q}(q,\ q^2-2aq+4a^2)$ における放物線の接線の方程式は

$$y=(2q-2a)(x-q)+q^2-2aq+4a^2$$

である．この直線が原点を通るので

$$0=(2q-2a)\cdot(0-q)+q^2-2aq+4a^2$$

© 駿台予備学校

すなわち

$$q^2 = 4a^2$$

が成り立つ．よって，$q > 0$ であるから

$$q = 2a \qquad \cdots\cdots(答)$$

である．

(2)　△OPQ の面積を S_1 とする．$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \begin{pmatrix} 4a \\ 12a^2 \end{pmatrix}$，$\overrightarrow{\mathrm{OQ}} = \begin{pmatrix} 2a \\ 4a^2 \end{pmatrix}$ より

$$S_1 = \frac{\left|4a \cdot 4a^2 - 2a \cdot 12a^2\right|}{2} = \frac{|-8a^3|}{2} = 4a^3$$

である．

線分 PQ と，放物線 C の $2a \leqq x \leqq 4a$ の部分で囲まれた図形の面積を S_2 とする．直線 PQ は $x = 2a$，$4a$ の 2 点で放物線 $y = f(x)$ と交わるので，直線 PQ の方程式を $y = g(x)$ とすると，$f(x)$ の x^2 の係数が 1 であることと，$g(x)$ が x の 1 次式であることに注意して

$$f(x) - g(x) = (x - 2a)(x - 4a)$$

となる．よって，$2a \leqq x \leqq 4a$ において $f(x) \leqq g(x)$ であるから

$$\begin{aligned} S_2 &= \int_{2a}^{4a} \{g(x) - f(x)\}\,dx \\ &= \int_{2a}^{4a} \{-(x-2a)(x-4a)\}\,dx \\ &= \frac{1}{6}(4a - 2a)^3 = \frac{4}{3}a^3 \end{aligned}$$

である．

以上より，求める面積は

$$S = S_1 + S_2 = 4a^3 + \frac{4}{3}a^3 = \frac{16}{3}a^3 \qquad \cdots\cdots(答)$$

である．

(3)　(2) より

$$\frac{16}{3}a^3 = \frac{2}{3} \quad すなわち \quad a^3 = \frac{1}{8}$$

であるから，$a > 0$ より

$$a = \frac{1}{2} \qquad \cdots\cdots(答)$$

である．

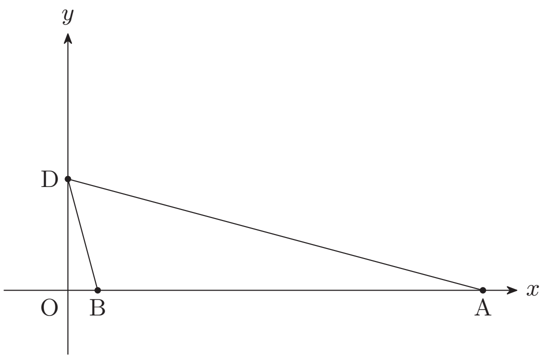
© 駿台予備学校

$\boxed{2}$

(1)
$$\tan 75^\circ = \tan(45^\circ + 30^\circ) = \frac{\tan 45^\circ + \tan 30^\circ}{1 - \tan 45^\circ \tan 30^\circ}$$
$$= \frac{1 + \frac{1}{\sqrt{3}}}{1 - \frac{1}{\sqrt{3}}} = \frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1} = 2 + \sqrt{3} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots \text{(答)}$$

である．

(2) 直角三角形 OAD において, $\angle\mathrm{OAD} = 15^\circ$ より, $\angle\mathrm{ADO} = 75^\circ$ であるから



$$\tan 75^\circ = \frac{\mathrm{AO}}{\mathrm{OD}} = \frac{a}{d}$$
$$\therefore \quad \frac{a}{d} = 2 + \sqrt{3}$$
$$\therefore \quad a = (2+\sqrt{3})d \quad \cdots\cdots\cdots\cdots ①$$

である．また，直角三角形 OBD において，$\angle\mathrm{OBD} = 75^\circ$ であるから

$$\tan 75^\circ = \frac{\mathrm{OD}}{\mathrm{OB}} = \frac{d}{b}$$
$$\therefore \quad \frac{d}{b} = 2 + \sqrt{3}$$
$$\therefore \quad d = (2+\sqrt{3})b \quad \cdots\cdots\cdots\cdots ②$$

である．①，②より

$$a = (2+\sqrt{3})^2 b$$

であり，$a - b = 6$ であるから

$$a - b = 6$$
$$\therefore \quad (2+\sqrt{3})^2 b - b = 6$$
$$\therefore \quad (6+4\sqrt{3})b = 6$$
$$\therefore \quad b = \frac{3}{3+2\sqrt{3}} = 2\sqrt{3} - 3 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots \text{(答)}$$

である．したがって

$$a = b + 6 = 2\sqrt{3} + 3 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots \text{(答)}$$

であり，②より

$$d = (2+\sqrt{3})b = (2+\sqrt{3})\cdot(2\sqrt{3}-3) = \sqrt{3} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots \text{(答)}$$

である．

© 駿台予備学校

(3) $\angle \mathrm{OPD} = 90^\circ$ であるから

$$\triangle \mathrm{APO} \backsim \triangle \mathrm{AOD}$$

である．よって

$$\mathrm{AP} : \mathrm{AO} = \mathrm{AO} : \mathrm{AD}$$
$$\therefore\ \ \mathrm{AP} \cdot \mathrm{AD} = \mathrm{AO}^2$$

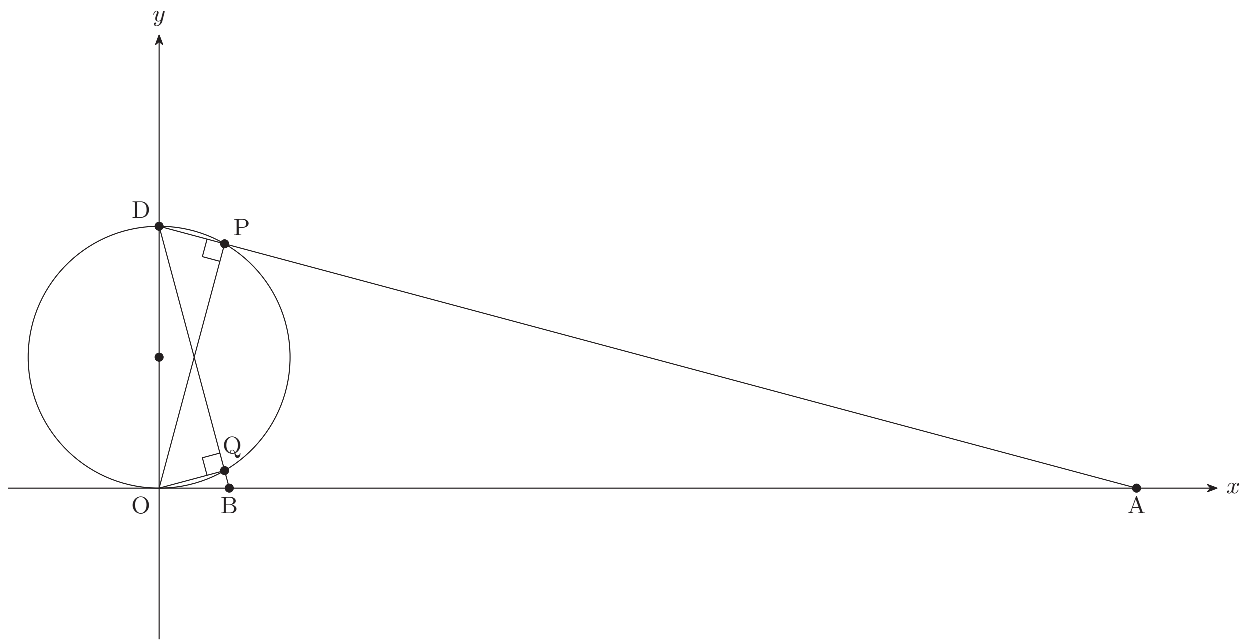
である．また $\angle \mathrm{OQD} = 90^\circ$ であるから

$$\triangle \mathrm{BQO} \backsim \triangle \mathrm{BOD}$$

である．よって

$$\mathrm{BQ} : \mathrm{BO} = \mathrm{BO} : \mathrm{BD}$$
$$\therefore\ \ \mathrm{BQ} \cdot \mathrm{BD} = \mathrm{BO}^2$$

である．



(4) (2)，(3) より

$$\begin{aligned}\mathrm{AP} \cdot \mathrm{BQ} &= \frac{\mathrm{AO}^2}{\mathrm{AD}} \cdot \frac{\mathrm{BO}^2}{\mathrm{BD}} \\ &= \frac{(2\sqrt{3}+3)^2 \cdot (2\sqrt{3}-3)^2}{\mathrm{AD} \cdot \mathrm{BD}} \\ &= \frac{\big((2\sqrt{3}+3) \cdot (2\sqrt{3}-3)\big)^2}{\mathrm{AD} \cdot \mathrm{BD}} \\ &= \frac{3^2}{\mathrm{AD} \cdot \mathrm{BD}} \\ &= \frac{9}{\mathrm{AD} \cdot \mathrm{BD}}\end{aligned}$$

である．ここで $\angle \mathrm{ADB} = 75^\circ - 15^\circ = 60^\circ$ より，$\triangle \mathrm{ABD}$ の面積について

$$\frac{1}{2}\mathrm{AD} \cdot \mathrm{BD} \sin 60^\circ = \frac{1}{2}\mathrm{AB} \cdot \mathrm{OD}$$
$$\therefore\ \ \mathrm{AD} \cdot \mathrm{BD} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 6 \cdot \sqrt{3}$$
$$\therefore\ \ \mathrm{AD} \cdot \mathrm{BD} = 12$$

© 駿台予備学校

であるから

$$\mathrm{AP}\cdot\mathrm{BQ}=\frac{9}{12}=\frac{3}{4} \quad \cdots\cdots \text{(答)}$$

である.

$\boxed{\text{別解 1}}$ (3) より

$$\mathrm{AP}\cdot\mathrm{BQ}=\frac{\mathrm{AO}^2}{\mathrm{AD}}\cdot\frac{\mathrm{BO}^2}{\mathrm{BD}}$$

である. (2) より

$$\begin{aligned}\mathrm{AD}^2&=a^2+d^2=(2\sqrt{3}+3)^2+(\sqrt{3})^2\\&=24+12\sqrt{3}\\\mathrm{BD}^2&=b^2+d^2=(2\sqrt{3}-3)^2+(\sqrt{3})^2\\&=24-12\sqrt{3}\end{aligned}$$

であるから

$$\begin{aligned}\mathrm{AD}^2\cdot\mathrm{BD}^2&=(24+12\sqrt{3})(24-12\sqrt{3})=24^2-(12\sqrt{3})^2\\&=12^2\cdot(2^2-3)=12^2\end{aligned}$$

$$\therefore\ \mathrm{AD}\cdot\mathrm{BD}=12$$

である. また

$$\begin{aligned}\mathrm{AO}^2\cdot\mathrm{BO}^2&=a^2b^2=(2\sqrt{3}+3)^2(2\sqrt{3}-3)^2\\&=\Big((2\sqrt{3}+3)(2\sqrt{3}-3)\Big)^2=3^2=9\end{aligned}$$

であるから

$$\mathrm{AP}\cdot\mathrm{BQ}=\frac{\mathrm{AO}^2}{\mathrm{AD}}\cdot\frac{\mathrm{BO}^2}{\mathrm{BD}}=\frac{9}{12}=\frac{3}{4} \quad \cdots\cdots \text{(答)}$$

である.

$\boxed{\text{別解 2}}$ (2), (3) より

$$\begin{aligned}\mathrm{AP}\cdot\mathrm{BQ}&=\frac{\mathrm{AO}^2}{\mathrm{AD}}\cdot\frac{\mathrm{BO}^2}{\mathrm{BD}}=\mathrm{AO}\cdot\frac{\mathrm{AO}}{\mathrm{AD}}\cdot\mathrm{BO}\cdot\frac{\mathrm{BO}}{\mathrm{BD}}\\&=a\cos 15^\circ\cdot b\sin 15^\circ\\&=\frac{1}{2}ab\cdot 2\sin 15^\circ\cos 15^\circ\\&=\frac{1}{2}ab\sin 30^\circ\\&=\frac{1}{2}(2\sqrt{3}+3)(2\sqrt{3}-3)\cdot\frac{1}{2}\\&=\frac{3}{4} \quad \cdots\cdots \text{(答)}\end{aligned}$$

である.

© 駿台予備学校

$\boxed{3}$

(1) **(解 1)**

$$
\begin{aligned}
&(x+1)-2\log_t(x+1)\\
&\geqq 2\log_t x\ +1-2\log_t(x+1) \qquad \Big(\text{条件 (b) を用いた.}\Big)\\
&=\ 1+2\big\{\log_t x-\log_t(x+1)\big\}\\
&=\ 1+2\log_t\frac{x}{x+1}
\end{aligned}
$$

であるから，$x+1>2\log_t(x+1)$ を示すためには

$$1+2\log_t\frac{x}{x+1}>0 \qquad \cdots\cdots①$$

を示せばよい.

$t>1$ と $x>0$ にも注意すると

$$
\begin{aligned}
① &\iff \log_t\frac{x}{x+1}>-\frac{1}{2}\\
&\iff \log_t\frac{x}{x+1}>\log_t\frac{1}{\sqrt{t}}\\
&\iff \frac{x}{x+1}>\frac{1}{\sqrt{t}}\\
&\iff x\sqrt{t}>x+1 \quad \Big(\because (x+1)\sqrt{t}>0\Big)
\end{aligned}
$$

(両辺に $(x+1)\sqrt{t}$ (>0) を掛けた.
両辺に正の数を掛けたので，不等号の向きはそのまま.)

$$
\begin{aligned}
&\iff x(\sqrt{t}-1)>1\\
&\iff x>\frac{1}{\sqrt{t}-1} \quad \Big(\text{これは条件 (a) である.}\Big)
\end{aligned}
$$

であり，条件 (a) は成り立つから①も成り立つ.

ゆえに，証明すべき不等式は成り立つ. (証明終)

© 駿台予備学校

(解 2)

$x > 0$ に注意すると

$$
\begin{aligned}
&2\log_t(x+1) \\
&= 2\log_t x\left(1+\frac{1}{x}\right) \\
&= 2\left\{\log_t x + \log_t\left(1+\frac{1}{x}\right)\right\} \\
&= 2\log_t x + 2\log_t\left(1+\frac{1}{x}\right) \\
&\leqq x + 2\log_t\left(1+\frac{1}{x}\right) \quad \left(\text{条件 (b) を用いた}\right) \\
&= x + \log_t\left(1+\frac{1}{x}\right)^2 \qquad \cdots\cdots②
\end{aligned}
$$

である．$t > 1$ と $x > 0$ にも注意して

$$\text{条件 (a)}: x > \frac{1}{\sqrt{t}-1}$$

を変形すると

$$
\begin{aligned}
&\sqrt{t} - 1 > \frac{1}{x} \\
\therefore\ &\sqrt{t} > 1 + \frac{1}{x} \\
\therefore\ &t > \left(1+\frac{1}{x}\right)^2 \\
\therefore\ &\log_t t > \log_t\left(1+\frac{1}{x}\right)^2 \\
\therefore\ &\log_t\left(1+\frac{1}{x}\right)^2 < 1 \qquad \cdots\cdots③
\end{aligned}
$$

である．②,③から

$$
\begin{aligned}
2\log_t(x+1) &\leqq x + \log_t\left(1+\frac{1}{x}\right)^2 \quad (\because ②) \\
&< x+1 \quad (\because ③)
\end{aligned}
$$

$$\therefore\ x+1 > 2\log_t(x+1)$$

である．　(証明終)

© 駿台予備学校

(2) $\qquad n \leqq 2\log_2 n \qquad\qquad \cdots\cdots(*)$

について

$n=1$ のとき

(左辺) $=1$, (右辺) $=2\log_2 1=0$ であるから，$(*)$ は成り立たない．

$n=2$ のとき

(左辺) $=2$, (右辺) $=2\log_2 2=2$ であるから，$(*)$ は成り立つ．

$n=3$ のとき

(左辺) $=3=\log_2 8$, (右辺) $=2\log_2 3=\log_2 3^2=\log_2 9$ であるから，

$(*)$ は成り立つ．

$n=4$ のとき

(左辺) $=4=\log_2 16$, (右辺) $=2\log_2 4=\log_2 4^2=\log_2 16$ であるから，

$(*)$ は成り立つ．

ここで，(1) で示した内容について，とくに $t=2$ の場合を考えると

「正の実数 x が

$$\begin{cases} x > \dfrac{1}{\sqrt{2}-1} \left(=\sqrt{2}+1\right) & \cdots\cdots④ \\ x \geqq 2\log_2 x & \cdots\cdots⑤ \end{cases}$$

を満たすならば

$$x+1 > 2\log_2(x+1) \qquad \cdots\cdots⑥$$

が成り立つ．」

となる．このことを用いると，まず

$x=4$ は，④と⑤を満たすから⑥も満たす．

ゆえに，$5>2\log_2 5$ であるから，$n=5$ のとき $(*)$ は成り立たない．

次に

いま，$x=4$ は⑥を満たす (つまり $5>2\log 5$ である) とわかったが，

このことから，$x=5$ は⑤を満たす (つまり $5 \geqq 2\log 5$ である) といえる

ので，$x=5$ が④も満たすことを考えれば

$x=5$ は④と⑤を満たすから⑥も満たす．

ゆえに，$6>2\log_2 6$ であるから，$n=6$ のとき $(*)$ は成り立たない．

以下，同様の議論を繰り返すことにより，$n=5,\ 6,\ 7,\ \cdots$ のときは $(*)$ が成り立たないことがわかる．

以上から，$(*)$ を満たす正の整数 n は

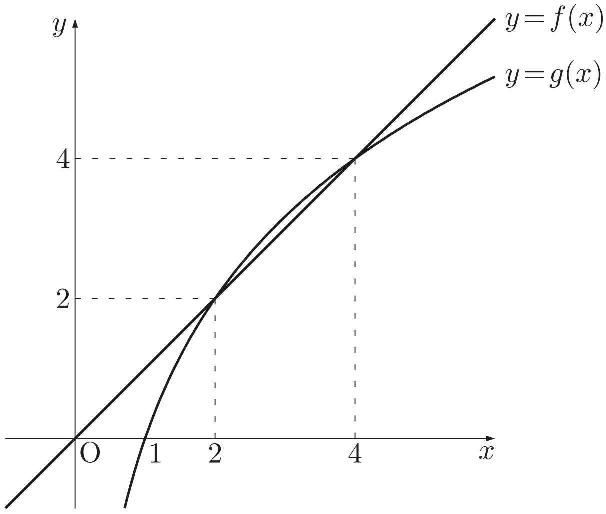
$n=2,\ 3,\ 4 \qquad\qquad \cdots\cdots$ (答)

ですべてである．

© 駿台予備学校

(注) $f(x)=x$, $g(x)=2\log_2 x$ とおくと

$y=f(x)$, $y=g(x)$ のグラフは下のようになる.



交点は (2, 2) と (4, 4) であるが,これは「交点を求めよう」としなくても,「$y=g(x)$ が通る点で x 座標と y 座標が整数になりそうなものはどこだろうか」と考えれば (2, 2) や (4, 4) を通ることはわかるだろう.(x 座標が 2 の整数乗であれば y 座標が整数になる.)

このグラフから,$n \leqq 2\log_2 n$ すなわち $f(n) \leqq g(n)$ が成り立つのは

$$2 \leqq n \leqq 4$$

すなわち

$$n=2,\ 3,\ 4$$

のときであることがわかる.

© 駿台予備学校

$\boxed{4}$ (1) 題意より，すべての自然数 n に対して

$$(1+\sqrt{2})^n = a_n + b_n\sqrt{2} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ①$$

を満たす整数の組 $(a_n,\ b_n)$ がただ 1 つ定まる．

そこで

$$\begin{aligned} a_{n+1}+b_{n+1}\sqrt{2} &= (1+\sqrt{2})^{n+1} \\ &= (1+\sqrt{2})(a_n+b_n\sqrt{2}) \\ &= (a_n+2b_n)+(a_n+b_n)\sqrt{2} \end{aligned}$$

が成り立ち，a_n，b_n，a_{n+1}，b_{n+1} は整数，$\sqrt{2}$ は無理数であることから

$$a_{n+1} = a_n + 2b_n \ \cdots\cdots\ ②,\quad b_{n+1} = a_n + b_n \ \cdots\cdots\ ③ \qquad \cdots\cdots(答)$$

また，① において，$n=1$ のときを考えると $a_1=1$，$b_1=1$ であるから，②，③ を繰り返し用いると，右表を得る．

n	1	2	3	4	5	6
a_n	1	3	7	17	41	99
b_n	1	2	5	12	29	70

よって

$$b_4 = 12,\quad b_5 = 29,\quad b_6 = 70 \quad \cdots\cdots(答)$$

(2) すべての自然数 n に対して

$$(1-\sqrt{2})^n = a_n - b_n\sqrt{2} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ④$$

が成り立つことを数学的帰納法で示す．

(I) $n=1$ のとき，$a_1=1$，$b_1=1$ より ④ は成り立つ．

(II) $n=k(\geqq 1)$ のとき ④ が成り立つことを仮定すると

$$\begin{aligned} (1-\sqrt{2})^{k+1} &= (1-\sqrt{2})(1-\sqrt{2})^k \\ &= (1-\sqrt{2})(a_k-b_k\sqrt{2}) \\ &= (a_k+2b_k)-(a_k+b_k)\sqrt{2} \end{aligned}$$

となり，②，③ より

$$(1-\sqrt{2})^{k+1} = a_{k+1} - b_{k+1}\sqrt{2}$$

が成り立つ．

よって，$n=k+1$ のときも ④ は成り立つ．

したがって，(I)，(II) より，すべての自然数 n に対して ④ は成り立つ．

(3) まず，① と ④ の辺々を掛け合わせると

$$\begin{aligned} (a_n+b_n\sqrt{2})(a_n-b_n\sqrt{2}) &= (1+\sqrt{2})^n(1-\sqrt{2})^n \\ &= \{(1+\sqrt{2})(1-\sqrt{2})\}^n \end{aligned}$$

$$\therefore\quad {a_n}^2 - 2{b_n}^2 = (-1)^n \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ⑤$$

© 駿台予備学校

次に ② − ③ より $a_{n+1}-b_{n+1}=b_n$ であるから，$n \geqq 2$ のとき $b_{n-1}=a_n-b_n$ である．

これと ③，⑤ から，$n \geqq 2$ のとき

$$b_{n+1}b_{n-1}-{b_n}^2=(a_n+b_n)(a_n-b_n)-{b_n}^2={a_n}^2-2{b_n}^2=(-1)^n \qquad \cdots\cdots(答)$$

である．

(4) (3) の結果に $n=5$ を代入すると，$b_6b_4-{b_5}^2=(-1)^5(=-1)$ となるから

$$b_6\cdot(-b_4)-b_5\cdot(-b_5)=1 \qquad \therefore \quad 70\cdot(-12)-29\cdot(-29)=1$$

が成り立つ．

これを $pb_6-qb_5=1$ すなわち $70p-29q=1$ から辺々引くと

$$70(p+12)-29(q+29)=0 \qquad \therefore \quad 70(p+12)=29(q+29)$$

70 と 29 は互いに素であるから，整数 m を用いて $p+12=29m$，$q+29=70m$ すなわち

$$p=-12+29m, \quad q=-29+70m$$

と表せる．

よって，$m=1$ とすれば

$$(p,\ q)=(17,\ 41) \qquad \cdots\cdots(答)$$

である．

© 駿台予備学校