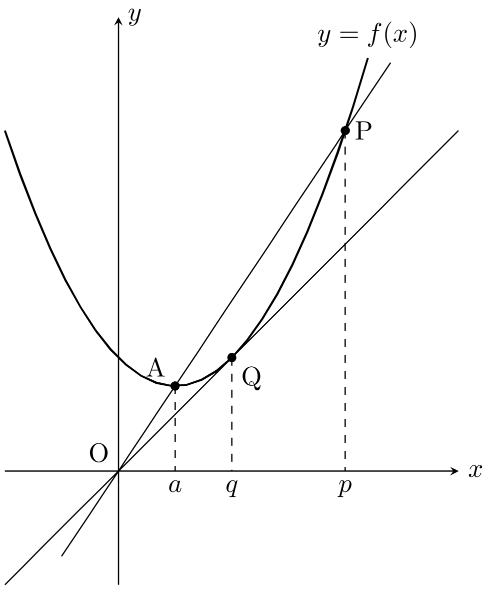
$\boxed{\mathbf{1}}$



(1)　$f(x)=x^2-2ax+4a^2=(x-a)^2+3a^2$ より $\mathrm{A}(a,\ 3a^2)$ であるから，$a>0$ より直線 OA の方程式は

$$y=3ax$$

である．x の方程式 $f(x)=3ax$ の $x=a$ 以外の解が p であるから

$$x^2-2ax+4a^2=3ax$$
$$x^2-5ax+4a^2=0$$
$$(x-a)(x-4a)=0$$

より

$$p=4a \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

である．

原点を通り傾き m の直線 $y=mx$ が放物線 $y=f(x)$ と接するとき，x の 2 次方程式

$$x^2-(2a+m)x+4a^2=0$$

が重解を持つので

$$(2a+m)^2-16a^2=0 \quad \text{すなわち} \quad 2a+m=\pm 4a$$

が成り立つ．このとき，接点の x 座標 q は

$$q=\frac{2a+m}{2}$$

であり，$q>0$ であるから $2a+m>0$ である．$a>0$ に注意すると

$$2a+m=4a \quad \text{すなわち} \quad m=2a$$

であり

$$q=\frac{4a}{2}=2a \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

である．$a>0$ であるから，$4a>2a$，すなわち $p>q$ である．

(別解) q の値は，次のように考えて求めることもできる．

$f(x)=x^2-2ax+4a^2$ より $f'(x)=2x-2a$ であるから，$\mathrm{Q}(q,\ q^2-2aq+4a^2)$ における放物線の接線の方程式は

$$y=(2q-2a)(x-q)+q^2-2aq+4a^2$$

である．この直線が原点を通るので

$$0=(2q-2a)\cdot(0-q)+q^2-2aq+4a^2$$

すなわち

$$q^2 = 4a^2$$

が成り立つ．よって，$q > 0$ であるから

$$q = 2a \qquad \cdots\cdots(答)$$

である．

(2)　$\triangle$OPQ の面積を S_1 とする．$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \begin{pmatrix} 4a \\ 12a^2 \end{pmatrix}$，$\overrightarrow{\mathrm{OQ}} = \begin{pmatrix} 2a \\ 4a^2 \end{pmatrix}$ より

$$S_1 = \frac{\left|4a \cdot 4a^2 - 2a \cdot 12a^2\right|}{2} = \frac{|-8a^3|}{2} = 4a^3$$

である．

線分 PQ と，放物線 C の $2a \leqq x \leqq 4a$ の部分で囲まれた図形の面積を S_2 とする．直線 PQ は $x = 2a$，$4a$ の 2 点で放物線 $y = f(x)$ と交わるので，直線 PQ の方程式を $y = g(x)$ とすると，$f(x)$ の x^2 の係数が 1 であることと，$g(x)$ が x の 1 次式であることに注意して

$$f(x) - g(x) = (x - 2a)(x - 4a)$$

となる．よって，$2a \leqq x \leqq 4a$ において $f(x) \leqq g(x)$ であるから

$$\begin{aligned} S_2 &= \int_{2a}^{4a} \{g(x) - f(x)\}\,dx \\ &= \int_{2a}^{4a} \{-(x-2a)(x-4a)\}\,dx \\ &= \frac{1}{6}(4a - 2a)^3 = \frac{4}{3}a^3 \end{aligned}$$

である．

以上より，求める面積は

$$S = S_1 + S_2 = 4a^3 + \frac{4}{3}a^3 = \frac{16}{3}a^3 \qquad \cdots\cdots(答)$$

である．

(3)　(2) より

$$\frac{16}{3}a^3 = \frac{2}{3} \quad すなわち \quad a^3 = \frac{1}{8}$$

であるから，$a > 0$ より

$$a = \frac{1}{2} \qquad \cdots\cdots(答)$$

である．

$\boxed{2}$

(1) **(解 1)**

$$
\begin{aligned}
&(x+1)-2\log_t(x+1) \\
\geqq\ & 2\log_t x\ +1-2\log_t(x+1) \quad \left(\text{条件 (b) を用いた.}\right) \\
=\ & 1+2\left\{\log_t x-\log_t(x+1)\right\} \\
=\ & 1+2\log_t \frac{x}{x+1}
\end{aligned}
$$

であるから，$x+1>2\log_t(x+1)$ を示すためには

$$1+2\log_t \frac{x}{x+1}>0 \qquad \cdots\cdots①$$

を示せばよい．

$t>1$ と $x>0$ にも注意すると

$$
\begin{aligned}
① &\iff \log_t \frac{x}{x+1}>-\frac{1}{2} \\
&\iff \log_t \frac{x}{x+1}>\log_t \frac{1}{\sqrt{t}} \\
&\iff \frac{x}{x+1}>\frac{1}{\sqrt{t}} \\
&\iff x\sqrt{t}>x+1 \quad \left(\because (x+1)\sqrt{t}>0\right) \\
&\qquad \left(\begin{array}{l}\text{両辺に } (x+1)\sqrt{t}\ (>0) \text{ を掛けた.} \\ \text{両辺に正の数を掛けたので, 不等号の向きはそのまま.}\end{array}\right) \\
&\iff x(\sqrt{t}-1)>1 \\
&\iff x>\frac{1}{\sqrt{t}-1} \quad \left(\text{これは条件 (a) である.}\right)
\end{aligned}
$$

であり，条件 (a) は成り立つから①も成り立つ．

ゆえに，証明すべき不等式は成り立つ． (証明終)

(解 2)

$x>0$ に注意すると

$$\begin{aligned}
&2\log_t(x+1)\\
=&\ 2\log_t x\left(1+\frac{1}{x}\right)\\
=&\ 2\left\{\log_t x+\log_t\left(1+\frac{1}{x}\right)\right\}\\
=&\ 2\log_t x+2\log_t\left(1+\frac{1}{x}\right)\\
\leqq&\ x+2\log_t\left(1+\frac{1}{x}\right) \quad \left(\text{条件 (b) を用いた}\right)\\
=&\ x+\log_t\left(1+\frac{1}{x}\right)^2 \qquad \cdots\cdots②
\end{aligned}$$

である．$t>1$ と $x>0$ にも注意して

条件 (a)：$x>\dfrac{1}{\sqrt{t}-1}$

を変形すると

$$\sqrt{t}-1>\frac{1}{x}$$

$$\therefore\ \sqrt{t}>1+\frac{1}{x}$$

$$\therefore\ t>\left(1+\frac{1}{x}\right)^2$$

$$\therefore\ \log_t t>\log_t\left(1+\frac{1}{x}\right)^2$$

$$\therefore\ \log_t\left(1+\frac{1}{x}\right)^2<1 \qquad \cdots\cdots③$$

である．②,③から

$$\begin{aligned}
2\log_t(x+1)\ &\leqq\ x\ +\ \log_t\left(1+\frac{1}{x}\right)^2 \quad (\because ②)\\
&<\ x+1 \quad (\because ③)
\end{aligned}$$

$$\therefore\ x+1>2\log_t(x+1)$$

である． (証明終)

(2) $n \leqq 2\log_2 n$ $\cdots\cdots(*)$

について

$n=1$ のとき

$(\text{左辺})=1$，$(\text{右辺})=2\log_2 1=0$ であるから，$(*)$ は成り立たない．

$n=2$ のとき

$(\text{左辺})=2$，$(\text{右辺})=2\log_2 2=2$ であるから，$(*)$ は成り立つ．

$n=3$ のとき

$(\text{左辺})=3=\log_2 8$，$(\text{右辺})=2\log_2 3=\log_2 3^2=\log_2 9$ であるから，

$(*)$ は成り立つ．

$n=4$ のとき

$(\text{左辺})=4=\log_2 16$，$(\text{右辺})=2\log_2 4=\log_2 4^2=\log_2 16$ であるから，

$(*)$ は成り立つ．

ここで，(1) で示した内容について，とくに $t=2$ の場合を考えると

「正の実数 x が

$$\begin{cases} x > \dfrac{1}{\sqrt{2}-1}\ \left(=\sqrt{2}+1\right) & \cdots\cdots④ \\ x \geqq 2\log_2 x & \cdots\cdots⑤ \end{cases}$$

を満たすならば

$$x+1 > 2\log_2(x+1) \qquad \cdots\cdots⑥$$

が成り立つ．」

となる．このことを用いると，まず

$x=4$ は，④と⑤を満たすから⑥も満たす．

ゆえに，$5>2\log_2 5$ であるから，$n=5$ のとき $(*)$ は成り立たない．

次に

いま，$x=4$ は⑥を満たす (つまり $5>2\log 5$ である) とわかったが，

このことから，$x=5$ は⑤を満たす (つまり $5 \geqq 2\log 5$ である) といえる

ので，$x=5$ が④も満たすことを考えれば

$x=5$ は④と⑤を満たすから⑥も満たす．

ゆえに，$6>2\log_2 6$ であるから，$n=6$ のとき $(*)$ は成り立たない．

以下，同様の議論を繰り返すことにより，$n=5,\ 6,\ 7,\ \cdots$ のときは $(*)$ が成り立たないことがわかる．

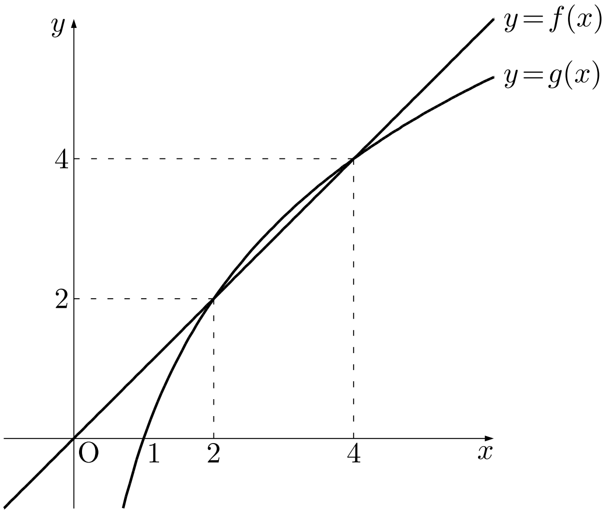
以上から，$(*)$ を満たす正の整数 n は

$n=2,\ 3,\ 4$ ……(答)

ですべてである．

(注) $f(x)=x$, $g(x)=2\log_2 x$ とおくと

$y=f(x)$, $y=g(x)$ のグラフは下のようになる.



交点は (2, 2) と (4, 4) であるが, これは「交点を求めよう」としなくても, 「$y=g(x)$ が通る点で x 座標と y 座標が整数になりそうなものはどこだろうか」と考えれば (2, 2) や (4, 4) を通ることはわかるだろう. $\left(x\right.$ 座標が 2 の整数乗であれば y 座標が整数になる.$\left.\right)$

このグラフから, $n \leqq 2\log_2 n$ すなわち $f(n) \leqq g(n)$ が成り立つのは

$$2 \leqq n \leqq 4$$

すなわち

$$n=2,\ 3,\ 4$$

のときであることがわかる.

$\boxed{3}$

(1) p_2, q_2, r_2 は作った文字列がそれぞれ AA, BA, AB となる確率なので

$$p_2 = \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{4}{9} \quad \cdots\cdots(答)$$

$$q_2 = \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{2}{9} \quad \cdots\cdots(答)$$

$$r_2 = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{2}{9} \quad \cdots\cdots(答)$$

である. また

- 「$\cdots$AA」は, 確率 $\frac{2}{3}$ で「$\cdots$AAA」に, 確率 $\frac{1}{3}$ で「$\cdots$AB」となる
- 「$\cdots$BA」は, 確率 $\frac{2}{3}$ で「$\cdots$AA」に, 確率 $\frac{1}{3}$ で「$\cdots$AB」となる
- 「$\cdots$B」は, 確率 $\frac{2}{3}$ で「$\cdots$BA」に, 確率 $\frac{1}{3}$ で「$\cdots$BB」となる

であるから, AAA, BB が不可であることに注意して

$$\begin{cases} p_{n+1} = \dfrac{2}{3}q_n & \cdots\cdots① \\ q_{n+1} = \dfrac{2}{3}r_n & \cdots\cdots② \\ r_{n+1} = \dfrac{1}{3}p_n + \dfrac{1}{3}q_n & \cdots\cdots③ \end{cases} \quad \cdots\cdots(答)$$

である.

(2) ① + 2 × ② + 2 × ③ より

$$p_{n+1} + 2q_{n+1} + 2r_{n+1} = \frac{2}{3}(p_n + 2q_n + 2r_n)$$

であり, $p_2 + 2q_2 + 2r_2 = \frac{4}{3}$ であるから

$$p_n + 2q_n + 2r_n = \frac{4}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^{n-2} = 3\left(\frac{2}{3}\right)^n \quad \cdots\cdots(答)$$

である.

(3) ① + i × ② − $(1+i)$ × ③ より

$$p_{n+1} + iq_{n+1} - (1+i)r_{n+1} = -\frac{1+i}{3}\left\{p_n + iq_n - (1+i)r_n\right\}$$

であり, $p_2 + iq_2 - (1+i)r_2 = \frac{2}{9}$ であるから

$$p_n + iq_n - (1+i)r_n = \frac{2}{9}\left(-\frac{1+i}{3}\right)^{n-2}$$

すなわち

$$p_n + iq_n - (1+i)r_n = -i\left(-\frac{1+i}{3}\right)^n \quad \cdots\cdots ④\ (答)$$

である.

(4) ④の両辺の共役複素数をとると, p_n, q_n, r_n が実数であることに注意して

$$p_n - iq_n - (1-i)r_n = i\left(-\frac{1-i}{3}\right)^n \qquad \cdots\cdots ⑤$$

となるので, $\dfrac{④+⑤}{2}$ より

$$p_n - r_n = \frac{1}{2}\left\{-i\left(-\frac{1+i}{3}\right)^n + i\left(-\frac{1-i}{3}\right)^n\right\}$$

である. よって, $p_n = r_n$ は

$$\frac{1}{2}\left\{-i\left(-\frac{1+i}{3}\right)^n + i\left(-\frac{1-i}{3}\right)^n\right\} = 0$$

すなわち

$$(1+i)^n = (1-i)^n$$

と同値である. 括弧内を極形式で表すと

$$\left\{\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)\right\}^n = \left\{\sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)\right\}^n$$

となり, ド・モアブルの定理を用いると

$$\cos\frac{\pi}{4}n + i\sin\frac{\pi}{4}n = \cos\left(-\frac{\pi}{4}n\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4}n\right)$$

となる. さらにこれは

$$\sin\frac{\pi}{4}n = 0$$

と変形できるので

$$p_n = r_n \iff \frac{\pi}{4}n \text{ は}\pi\text{の整数倍} \iff n \text{ は } 4 \text{ の倍数} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

である.

※ ④の左辺は $(p_n - r_n) + (q_n - r_n)i$ と変形できるので

$$p_n - r_n = \mathrm{Re}\left(-i\left(-\frac{1+i}{3}\right)^n\right)$$

として考えてもよい.

$\boxed{4}$

(1)　$\mathrm{P_1}(3,\ -1,\ 1)$，$\mathrm{P_2}(5,\ 0,\ -1)$ より

$$\mathrm{P_1P_2} = \sqrt{(5-3)^2 + \{0-(-1)\}^2 + (-1-1)^2} = \sqrt{4+1+4} = 3 \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

である．

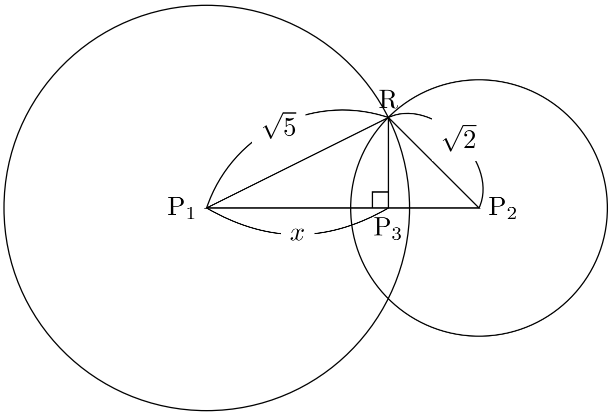
(2)　S_1 の半径を r_1，S_2 の半径を r_2，中心間距離を d とすると

$$r_1 = \sqrt{5}, \qquad r_2 = \sqrt{2}, \qquad d = 3$$

であり，$2 < r_1 < 3$，$1 < r_2 < 2$ より

$$|r_1 - r_2| < d < r_1 + r_2$$

が成り立つ．よって，S_1 と S_2 は交わりをもつ．　(証明終)



いま, 円 C の中心 $\mathrm{P_3}$ は線分 $\mathrm{P_1P_2}$ 上にある．円 C 上に点 R をとり, $\mathrm{P_1P_3}$ の長さを x とする．このとき, $\mathrm{P_1P_2} \perp \mathrm{RP_3}$ であるから，三平方の定理より

$$(\sqrt{5})^2 - x^2 = (\sqrt{2})^2 - (3-x)^2 (= \mathrm{RP_3}^2)$$

が成り立つ．これを解いて

$$x = 2$$

であり，C の半径は $\mathrm{RP_3}$ の長さに等しいので

$$\sqrt{(\sqrt{5})^2 - 2^2} = 1 \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

である．

また，$\mathrm{P_3}$ は線分 $\mathrm{P_1P_2}$ を $2:1$ に内分する点であるから，$\mathrm{P_3}$ の座標は

$$\left(\frac{13}{3},\ -\frac{1}{3},\ -\frac{1}{3}\right) \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

である．

(3)　$\overrightarrow{\mathrm{P_1P_2}} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ は平面 H に垂直である．また，xy 平面に垂直なベクトルの 1 つは $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ である．xy 平面と H の両方に平行なベクトルは，これら 2 つのベクトルに垂直であるから，求めるベクトルを $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ とすると，$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ の大きさが 1 であることと 内積 $= 0$ より

$$\begin{cases} a^2 + b^2 + c^2 = 1 \\ c = 0 \\ 2a + b - 2c = 0 \end{cases} \qquad \text{すなわち} \qquad \begin{cases} c = 0 \\ b = -2a \\ a = \pm\dfrac{1}{\sqrt{5}} \end{cases}$$

である．よって，求めるベクトルは

$$\pm\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

である．

(4)　$\vec{a}=\dfrac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}1\\-2\\0\end{pmatrix}$ とする．$\vec{a}$ に垂直で，平面 H に平行なベクトルのうち，大きさが 1 のものは，$\vec{a}$ と $\begin{pmatrix}2\\1\\-2\end{pmatrix}$ の両方に垂直である．そのようなベクトルの 1 つを $\begin{pmatrix}p\\q\\r\end{pmatrix}$ とすると，(3) と同様にして

$$\begin{cases}p^2+q^2+r^2=1\\p-2q=0\\2p+q-2r=0\end{cases}\qquad\text{すなわち}\qquad\begin{cases}p^2+q^2+r^2=1\\p=2q\\5q=2r\end{cases}$$

である．これを解いて

$$\begin{pmatrix}p\\q\\r\end{pmatrix}=\pm\frac{1}{3\sqrt{5}}\begin{pmatrix}4\\2\\5\end{pmatrix}$$

である．以下，$\vec{b}=\dfrac{1}{3\sqrt{5}}\begin{pmatrix}4\\2\\5\end{pmatrix}$ とする．

$\vec{a}$，$\vec{b}$ は，ともに平面 H に平行な単位ベクトルで，かつ互いに垂直なベクトルである．点 Q は，平面 H 上の半径 1 の円 C 上を動くので，実数 θ を用いて

$$\overrightarrow{\mathrm{P_3Q}}=(\cos\theta)\vec{a}+(\sin\theta)\vec{b}$$

と表せる．よって

$$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\overrightarrow{\mathrm{OP_3}}+\overrightarrow{\mathrm{P_3Q}}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}13\\-1\\-1\end{pmatrix}+\frac{\cos\theta}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}1\\-2\\0\end{pmatrix}+\frac{\sin\theta}{3\sqrt{5}}\begin{pmatrix}4\\2\\5\end{pmatrix}$$

である．Q と xy 平面の距離 d は，$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ の z 成分の絶対値であるから

$$d=\left|-\frac{1}{3}+\frac{\sqrt{5}}{3}\sin\theta\right|$$

である．θ は任意の実数値をとり得るので，d の最大値は $\sin\theta=-1$ のときの

$$\left|-\frac{1}{3}-\frac{\sqrt{5}}{3}\right|=\frac{1+\sqrt{5}}{3}\qquad\cdots\cdots(答)$$

である．またこのとき $\cos\theta=0$ であるから，d の最大値を与える Q の座標は

$$\left(\frac{13}{3}-\frac{4\sqrt{5}}{15},\ -\frac{1}{3}-\frac{2\sqrt{5}}{15},\ -\frac{1+\sqrt{5}}{3}\right)\qquad\cdots\cdots(答)$$

である．

【参考】

(4) の $\vec{b}$ を，z 成分が負のものでとると

$$\vec{b}=-\frac{1}{3\sqrt{5}}\begin{pmatrix}4\\2\\5\end{pmatrix}$$

である．(2) より P_3 の z 座標は負であるから，d が最大となるのは，$|\vec{b}|=1$ に注意して

$$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\overrightarrow{\mathrm{OP_3}}+\vec{b}$$

のときである．よって，d の最大値を与える Q の座標は

$$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}13\\-1\\-1\end{pmatrix}-\frac{1}{3\sqrt{5}}\begin{pmatrix}4\\2\\5\end{pmatrix}$$

より

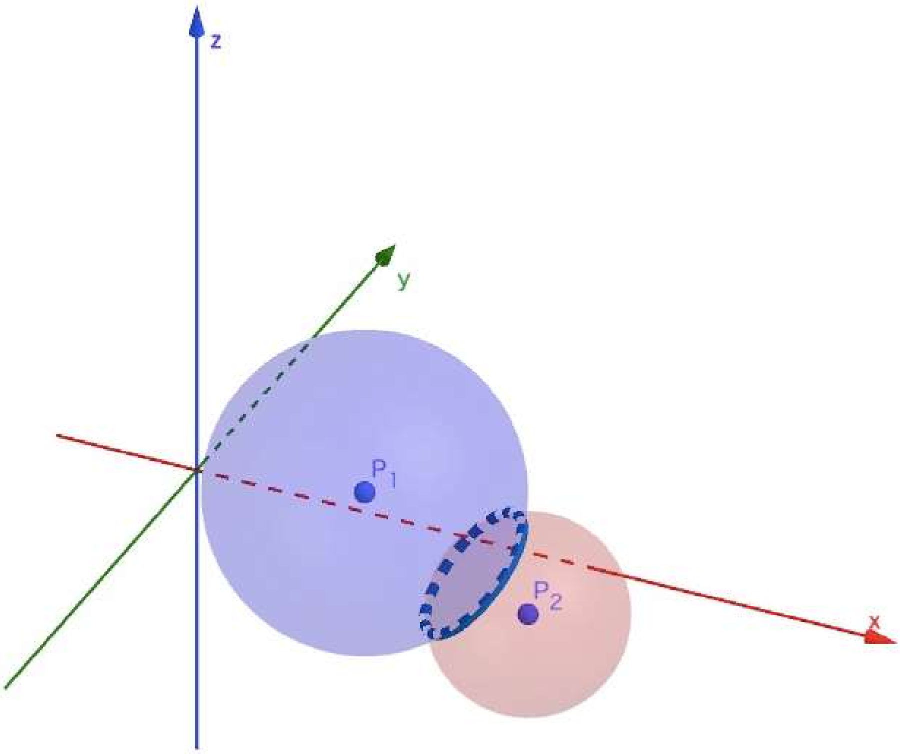
$$\mathrm{Q}\left(\frac{13}{3}-\frac{4\sqrt{5}}{15},\ -\frac{1}{3}-\frac{2\sqrt{5}}{15},\ -\frac{1}{3}-\frac{\sqrt{5}}{3}\right)$$

であり，d の最大値は

$$\left|-\frac{1}{3}-\frac{\sqrt{5}}{3}\right|=\frac{1+\sqrt{5}}{3}$$

であることがわかる．

また，球面 S_1，S_2 とその交わり C は下図のようになる．なお，青の球面 (大きい方) が S_1，赤の球面 (小さい方) が S_2，青の太線が C である．



$\boxed{5}$

(1)　$f(x)=\dfrac{\log(2x-3)}{x}$　$(x \geqq 2)$ を x で微分して

$$f'(x)=\frac{\dfrac{2}{2x-3}\cdot x-\{\log(2x-3)\}\cdot 1}{x^2}=\frac{2x-(2x-3)\log(2x-3)}{x^2(2x-3)}$$

よって

$$g(x)=2x-(2x-3)\log(2x-3)$$ ……（答）

である．

(2)　$x>2$ のとき

$$g'(x)=2-\left\{2\log(2x-3)+(2x-3)\cdot\frac{2}{2x-3}\right\}=-2\log(2x-3)<0$$

よって，$g(x)$ は単調に減少する連続関数で

$$g(2)=4\ ,\ \lim_{x\to\infty}g(x)=\lim_{x\to\infty}(2x-3)\left\{\frac{2x}{2x-3}-\log(2x-3)\right\}=-\infty$$

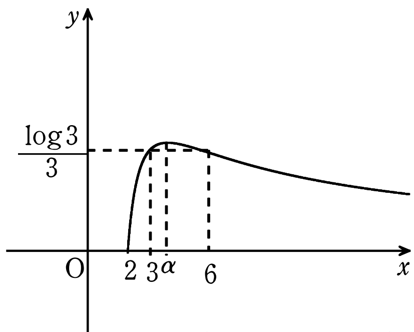
であるから，$g(\alpha)=0$ を満たす 2 以上の実数 α はただ 1 つ存在する．

(3)　(1), (2) より $f(x)$ の増減は次のようになる．

x	2	$\cdots$	α	$\cdots$
$f'(x)$		$+$	0	$-$
$f(x)$	0	↗		↘

$$\lim_{x\to\infty}f(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{2x-3}{x}\cdot\frac{\log(2x-3)}{2x-3}=\lim_{x\to\infty}\left(2-\frac{3}{x}\right)\cdot\frac{\log(2x-3)}{2x-3}=0$$

よって，$y=f(x)$　$(x\geqq 2)$ のグラフの概形は右図のようになる．



(4)　$2\leqq m<n$ のとき，$2m-3>0$, $2n-3>0$ であり，(*) の両辺の対数をとっても同値である．すなわち

$$(2m-3)^n=(2n-3)^m \Leftrightarrow n\log(2m-3)=m\log(2n-3) \Leftrightarrow \frac{\log(2m-3)}{m}=\frac{\log(2n-3)}{n}$$

$$\Leftrightarrow \quad f(m)=f(n)$$

(3) の図より，(*) を満たす整数の組 $(m\ ,n)$ について，$2\leqq m<n$ においては，m 1 つに対して n はただ 1 つのみ対応する．

$$f(3)=\frac{\log 3}{3}\ ,\ f(4)=\frac{\log 5}{4}\ ,\ f(5)=\frac{\log 7}{5}\ ,\ f(6)=\frac{\log 9}{6}=\frac{\log 3^2}{6}=\frac{\log 3}{3}$$

よって，$f(3)=f(6)$，$f(4)\fallingdotseq f(5)$ が成り立ち，$n>6$ のとき図より $2<m<3$ となるがこれを満たす m は存在しない．したがって，求める $(m\ ,n)$ は

$$(m\ ,n)=(3\ ,6)$$ ……（答）

のみである．

$\boxed{6}$

(1) R は直線 PQ 上にあるので, t を実数として $\overrightarrow{\mathrm{PR}}=t\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$ と表すことができる. よって

$$\overrightarrow{\mathrm{OR}}=\overrightarrow{\mathrm{OP}}+\overrightarrow{\mathrm{PQ}}=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}\cos\theta\\\sin\theta\\-1\end{pmatrix}$$

より

$$\mathrm{R}\,(t\cos\theta,\ t\sin\theta,\ 1-t)$$

であり, R は平面 $z=x$ 上にあるから

$$1-t=t\cos\theta\quad\text{すなわち}\quad(1+\cos\theta)t=1$$

である. さらに, $-\dfrac{\pi}{2}\leqq\theta\leqq\dfrac{\pi}{2}$ より $\cos\theta\geqq0$ であるから

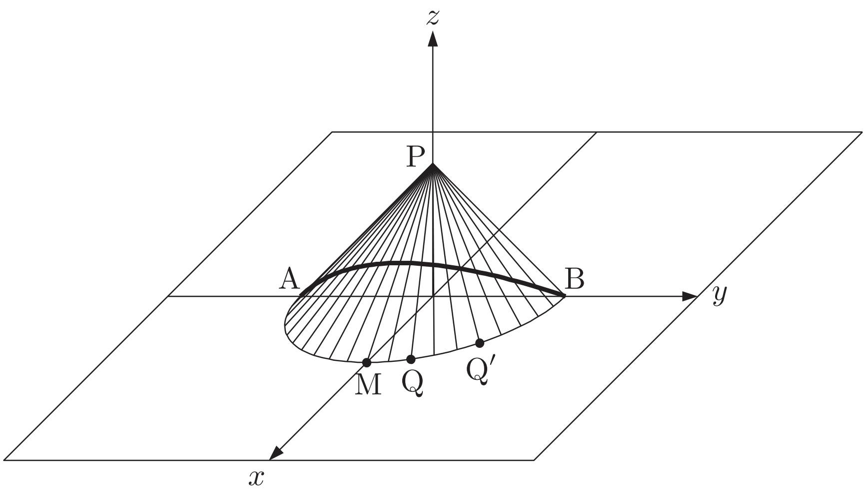
$$t=\frac{1}{1+\cos\theta}\ (>0)$$

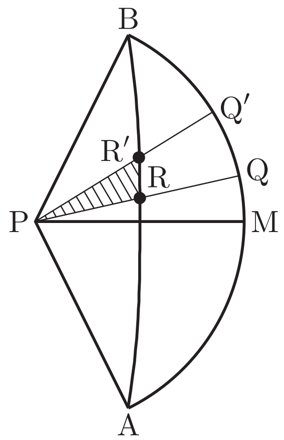
である. よって

$$r(\theta)=\mathrm{PR}=|t|\left|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}\right|=\frac{1}{1+\cos\theta}\cdot\sqrt{2}=\frac{\sqrt{2}}{1+\cos\theta}\qquad\cdots\cdots(\text{答})$$

である.

(2) $\mathrm{M}(1,\ 0,\ 0)$, $\mathrm{Q}'\,(\cos(\theta+h),\ \sin(\theta+h),\ 0)$ とし, PQ' と E の交点を R' とする. K の側面の $x\geqq0$ の部分だけを切り取って, その展開図を作ると右下図のような扇形になる. この扇形の半径は K の母線の長さ $\sqrt{2}$ に等しい.





K の側面の展開図上で $h'=\angle\mathrm{QPQ}'$ とおくと, $\overset{\frown}{\mathrm{QQ}'}=\sqrt{2}h'$ である. 一方, C 上で $\overset{\frown}{\mathrm{QQ}'}=1\cdot h=h$ であるから

$$\sqrt{2}h'=h\quad\text{すなわち}\quad h'=\frac{h}{\sqrt{2}}\qquad\cdots\cdots①$$

である. また, $0\leqq\theta\leqq\dfrac{\pi}{2}$ において $r(\theta)$ は増加するので, 斜線部分の図形 PRR' の面積について

$$(\text{半径 } r(\theta),\ \text{中心角 } h'\text{の扇形})\leqq(\text{図形 PRR}')\leqq(\text{半径 } r(\theta+h),\ \text{中心角 } h'\text{の扇形})$$

が成り立つ. 図形 PRR$'$ の面積は $S(\theta+h)-S(\theta)$ と表すことができるので

$$\frac{1}{2}\{r(\theta)\}^2\cdot h' \leqq S(\theta+h)-S(\theta) \leqq \frac{1}{2}\{r(\theta+h)\}^2\cdot h'$$

となり, ①を代入すると

$$\frac{h\{r(\theta)\}^2}{2\sqrt{2}} \leqq S(\theta+h)-S(\theta) \leqq \frac{h\{r(\theta+h)\}^2}{2\sqrt{2}} \qquad \cdots\cdots (*)$$

となる. ■

(3) $(*)$ の両辺を $h\ (>0)$ で割ると

$$\frac{\{r(\theta)\}^2}{2\sqrt{2}} \leqq \frac{S(\theta+h)-S(\theta)}{h} \leqq \frac{\{r(\theta+h)\}^2}{2\sqrt{2}}$$

となる. $r(\theta)$ が連続であることより

$$\lim_{h\to+0}\frac{\{r(\theta+h)\}^2}{2\sqrt{2}} = \frac{\{r(\theta)\}^2}{2\sqrt{2}}$$

であるから, はさみうちの原理より

$$\lim_{h\to+0}\frac{S(\theta+h)-S(\theta)}{h} = \frac{\{r(\theta)\}^2}{2\sqrt{2}} \qquad \cdots\cdots②$$

である. また, $0 \leqq \theta+h < \theta \leqq \dfrac{\pi}{2}$ のときは, $h<0$ より $-h>0$ であるから, (2) と同様にして

$$\frac{-h\{r(\theta+h)\}^2}{2\sqrt{2}} \leqq S(\theta)-S(\theta+h) \leqq \frac{-h\{r(\theta)\}^2}{2\sqrt{2}}$$

が成り立ち, 両辺を $-h$ で割ると

$$\frac{\{r(\theta+h)\}^2}{2\sqrt{2}} \leqq \frac{S(\theta+h)-S(\theta)}{h} \leqq \frac{\{r(\theta)\}^2}{2\sqrt{2}}$$

となるから

$$\lim_{h\to-0}\frac{S(\theta+h)-S(\theta)}{h} = \frac{\{r(\theta)\}^2}{2\sqrt{2}} \qquad \cdots\cdots③$$

である. ②, ③より

$$\lim_{h\to0}\frac{S(\theta+h)-S(\theta)}{h} = \frac{\{r(\theta)\}^2}{2\sqrt{2}}$$

すなわち

$$S'(\theta) = \frac{1}{\sqrt{2}(1+\cos\theta)^2}$$

である.

K の展開図は直線 PM に関して対称であり, Q は $\theta=0$ のとき M, $\theta=\dfrac{\pi}{2}$ のとき B であるから

$$\frac{T}{2} = (\text{扇形 BPM}) - \left\{S\left(\frac{\pi}{2}\right)-S(0)\right\} = \frac{1}{2}(\sqrt{2})^2\cdot\frac{\pi}{2\sqrt{2}} - \left\{S\left(\frac{\pi}{2}\right)-S(0)\right\}$$

すなわち

$$T=\frac{\pi}{\sqrt{2}}-2\left\{S\left(\frac{\pi}{2}\right)-S(0)\right\}$$

である. ここで

$$S\left(\frac{\pi}{2}\right)-S(0)=\Big[S(\theta)\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}S'(\theta)d\theta=\frac{1}{\sqrt{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{(1+\cos\theta)^2}d\theta$$

であり, $u=\tan\dfrac{\theta}{2}$ と置換すると

θ	$0 \ \to \ \dfrac{\pi}{2}$
u	$0 \ \to \ 1$

$$\frac{du}{d\theta}=\frac{1}{\cos^2\dfrac{\theta}{2}}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{2}\left(1+\tan^2\frac{\theta}{2}\right)=\frac{1}{2}(1+u^2)\quad \text{より}\quad d\theta=\frac{2}{1+u^2}du$$

$$1+\cos\theta=2\cos^2\frac{\theta}{2}=2\cdot\frac{1}{1+\tan^2\dfrac{\theta}{2}}=\frac{2}{1+u^2}$$

であるから

$$\begin{aligned}S\left(\frac{\pi}{2}\right)-S(0)&=\frac{1}{\sqrt{2}}\int_0^1\left(\frac{1+u^2}{2}\right)^2\cdot\frac{2}{1+u^2}du\\&=\frac{1}{2\sqrt{2}}\int_0^1(1+u^2)du=\frac{1}{2\sqrt{2}}\left(1+\frac{1}{3}\right)=\frac{\sqrt{2}}{3}\end{aligned}$$

となる. よって

$$T=\frac{\pi}{\sqrt{2}}-\frac{2\sqrt{2}}{3} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

である.