2024年度 東京医科歯科大学 前期 数学

1

$$（＊）\quad a_1+a_2+\cdots+a_n=a_1\cdot a_2\cdot\cdots\cdot a_n \quad（a_1, a_2, \cdots, a_n \text{は自然数}）$$

(1)　$a_1 \leqq a_2 \leqq a_3$　…①

$n=3$ のとき，（＊）は，

$$a_1+a_2+a_3=a_1a_2a_3 \quad \cdots②$$

となるから，これと①より，

$$a_1a_2a_3=a_1+a_2+a_3 \leqq a_3+a_3+a_3=3a_3$$

$$\therefore \quad a_1a_2 \leqq 3 \quad \cdots③$$

となる．

ここで，$a_1 \geqq 2$ と仮定すると，①より，

$$a_1a_2 \geqq {a_1}^2 \geqq 2^2=4$$

となり③に反するから，$a_1=1$ である．これを①，②，③に代入して，

$$1 \leqq a_2 \leqq a_3 \quad \cdots①'$$

$$1+a_2+a_3=a_2a_3 \quad \cdots②'$$

$$a_2 \leqq 3 \quad \cdots③'$$

を得る．

①'，③'より，$a_2=1, 2, 3$ である．

$a_2=1$ のとき，②'は，

$$a_3+2=a_3$$

となるが，これを満たす a_3 は存在しない．

$a_2=2$ のとき，②'より，

$$a_3+3=2a_3 \quad \text{すなわち} \quad a_3=3$$

となり，これは①'を満たす．

$a_2=3$ のとき，②'より，

$$a_3+4=3a_3 \quad \text{すなわち} \quad a_3=2$$

となるが，これは①'に反する．

以上より，

$$(a_1, a_2, a_3)=(1, 2, 3) \quad \cdots（答）$$

が解である．

(2)　$a_1 \leqq a_2 \leqq \cdots \leqq a_n$ としても，一般性を失わない．このとき，$a_i=1$ となる i が存在しないと仮定すると，a_1，a_2，$\cdots$，a_n はすべて 2 以上の自然数であるから，

$$2 \leqq a_1 \leqq a_2 \leqq \cdots \leqq a_n \quad \cdots④$$

である．このとき，（＊）と④より，

$$a_1a_2\cdot\cdots\cdot a_n=a_1+a_2+\cdots+a_n\leqq a_n+a_n+\cdots+a_n=na_n$$

$$\therefore\quad a_1a_2\cdot\cdots\cdot a_{n-1}\leqq n \qquad \cdots⑤$$

となる．一方，$n\geqq 3$ に注意して，④と二項定理を用いると，

$$\begin{aligned}a_1a_2\cdot\cdots\cdot a_{n-1}&\geqq 2^{n-1}\\&=(1+1)^{n-1}\\&>{}_{n-1}\mathrm{C}_0+{}_{n-1}\mathrm{C}_1\\&=1+(n-1)=n\end{aligned}$$

となるが，これは⑤に反し矛盾する．

したがって，$n\geqq 3$ のとき，（＊）の任意の解において，$a_i=1$ となる i が少なくとも 1 つ存在する．（証明終）

(3)　$a_1\leqq a_2\leqq\cdots\leqq a_n$ としても，一般性を失わない．$a_i=1$ となる i がちょうど 2 個存在しているとする．

$n=2$ のとき，

$$a_1+a_2=1+1=2$$
$$a_1a_2=1\cdot 1=1<2$$

より，不適である．

$n=3$ のとき，(1)より不適である．

$n=4$ のとき，

$$1+1+2+4=8,\quad 1\cdot1\cdot2\cdot4=8$$

であるから，（＊）は自然数の組

$$(a_1, a_2, a_3, a_4)=(1, 1, 2, 4)$$

を解にもつ．

$n=5$ のとき，

$$1+1+2+2+2=8,\quad 1\cdot1\cdot2\cdot2\cdot2=8$$

であるから，（＊）は自然数の組

$$(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5)=(1, 1, 2, 2, 2)$$

を解にもつ．

$n\geqq 6$ のとき，

$$a_1=a_2=1$$
$$2\leqq a_3\leqq\cdots\leqq a_n \qquad \cdots⑥$$

である．

（＊）に $a_1=a_2=1$ を代入すると，

$$1+1+a_3+a_4+\cdots+a_n=1\cdot1\cdot a_3\cdot a_4\cdot\cdots\cdot a_n$$

$\therefore\quad a_3a_4\cdot\cdots\cdot a_n = 2+a_3+a_4+\cdots+a_n$

$$\leqq \underbrace{a_n+a_n+\cdots+a_n+a_n}_{n-1\text{個}} \qquad (\because\ ⑥)$$

$$=(n-1)a_n$$

$\therefore\quad a_3a_4\cdot\cdots\cdot a_{n-1}\leqq n-1$ …⑦

となる．一方，$n\geqq 6$ に注意して，⑥と二項定理を用いると，

$$\begin{aligned} a_3a_4\cdot\cdots\cdot a_{n-1} &\geqq 2^{n-3} \\ &\geqq (1+1)^{n-3} \\ &= {}_{n-3}\mathrm{C}_0+{}_{n-3}\mathrm{C}_1+\cdots+{}_{n-3}\mathrm{C}_{n-4}+{}_{n-3}\mathrm{C}_{n-3} \\ &> {}_{n-3}\mathrm{C}_0+{}_{n-3}\mathrm{C}_1+{}_{n-3}\mathrm{C}_{n-3} \\ &= 1+(n-3)+1 \\ &= n-1 \end{aligned}$$

となるが，これは⑦に反するから，不適である．

以上より，求める n の値は，

$n=4, 5$ …（答）

である．

《注》　(1)では，②の両辺を $a_1a_2a_3$ で割った式：

$$\frac{1}{a_2a_3}+\frac{1}{a_1a_3}+\frac{1}{a_1a_2}=1$$

と①より，

$$1\leqq\frac{3}{{a_1}^2}$$

を導いて利用する方法，(2)では，(＊) の両辺を $a_1a_2\cdots a_n$ で割った式：

$$\frac{1}{a_2a_3\cdots a_n}+\frac{1}{a_1a_3\cdots a_n}+\cdots+\frac{1}{a_1a_2\cdots a_{n-1}}=1 \qquad \cdots(＊)'$$

と④より，

$$1\leqq\frac{n}{2^{n-1}}$$

を導いて矛盾を示す方法，(3)の $n\geqq 6$ のところでは，(＊)’と⑥より，

$$1\leqq\frac{n-1}{2^{n-3}}$$

を導いて矛盾を示す方法もある．

なお，(1)で $a_1=1$ を導いたあとは，②’を，

$$(a_2-1)(a_3-1)=2$$

と変形して利用してもよい．

$\boxed{2}$

M は $C(-1,0,0)$ と $D(0,0,1)$ の中点であるから，その座標は $M\left(-\frac{1}{2},0,\frac{1}{2}\right)$ である．

また，$B(0,1,0)$ と $D(0,0,1)$ を結ぶ直線は yz 平面上の直線

$$y+z=1$$

であるから，線分 BD 上の点 N の座標は，

$$N(0,s,1-s)\quad(0\leqq s\leqq 1)$$

とおける．

このとき，勾配の定義により，

$$t_1=\frac{(1-s)-0}{\sqrt{(0-1)^2+(s-0)^2}}=\frac{1-s}{\sqrt{s^2+1}}\qquad\cdots\cdots①$$

$$t_2=\frac{\frac{1}{2}-(1-s)}{\sqrt{\left(-\frac{1}{2}-0\right)^2+(0-s)^2}}=\frac{s-\frac{1}{2}}{\sqrt{s^2+\frac{1}{4}}}\qquad\cdots\cdots②$$

である．

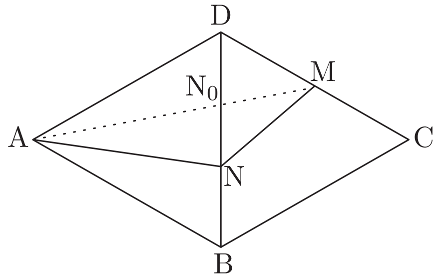
(1)　$t_2=0$ のとき，②より $s=\frac{1}{2}$ である．このとき，①より，

$$t_1=\frac{1-\frac{1}{2}}{\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2+1}}=\frac{1}{\sqrt{5}}\qquad\cdots\cdots(答)$$

である．

(2)　三角形 ABD と三角形 BCD はともに 1 辺の長さが $\sqrt{2}$ の正三角形である．

辺 BD を軸として三角形 BCD を回転して，下図のように 2 つの三角形が BD に関して対称になるようにする．このとき，$l=\left|\overrightarrow{AN}\right|+\left|\overrightarrow{NM}\right|$ は図における 2 つの線分 AN と NM の長さの和を表す．



線分 AM と線分 BD の交点を N_0 とすると，

$$AN+NM\geqq AM$$

であり，等号は N が $\mathrm{N_0}$ に一致するとき成立する．

よって，l は N が $\mathrm{N_0}$ に一致するとき最小であり，その最小値は線分 AM の長さである．

三角形 DAM において，

$$\mathrm{DA}=\sqrt{2},\quad \mathrm{DM}=\frac{\sqrt{2}}{2},\quad \angle\mathrm{ADM}=120^\circ$$

であるから，余弦定理を用いることにより，

$$\begin{aligned}\mathrm{AM}^2&=\mathrm{DA}^2+\mathrm{DM}^2-2\mathrm{DA}\cdot\mathrm{DM}\cos 120^\circ\\&=(\sqrt{2})^2+\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2-2\cdot\sqrt{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)\\&=\frac{7}{2}\end{aligned}$$

となる．よって，求める l の値は，

$$\sqrt{\frac{7}{2}}=\frac{\sqrt{14}}{2} \qquad \cdots\cdots(答)$$

である．

(3) ①, ②より，

$$\begin{aligned}0\leqq t_2\leqq t_1 &\iff 0\leqq\frac{s-\frac{1}{2}}{\sqrt{s^2+\frac{1}{4}}}\leqq\frac{1-s}{\sqrt{s^2+1}}\\
&\iff s-\frac{1}{2}\geqq 0 \text{ かつ } 1-s\geqq 0 \text{ かつ } \frac{\left(s-\frac{1}{2}\right)^2}{s^2+\frac{1}{4}}\leqq\frac{(1-s)^2}{s^2+1}\\
&\iff \frac{1}{2}\leqq s\leqq 1 \text{ かつ } 1-\frac{s}{s^2+\frac{1}{4}}\leqq 1-\frac{2s}{s^2+1}\\
&\iff \frac{1}{2}\leqq s\leqq 1 \text{ かつ } \frac{2s}{s^2+1}\leqq\frac{s}{s^2+\frac{1}{4}}\\
&\iff \frac{1}{2}\leqq s\leqq 1 \text{ かつ } \frac{2}{s^2+1}\leqq\frac{1}{s^2+\frac{1}{4}}\\
&\iff \frac{1}{2}\leqq s\leqq 1 \text{ かつ } s^2-\frac{1}{2}\leqq 0\\
&\iff \frac{1}{2}\leqq s\leqq\frac{1}{\sqrt{2}}\end{aligned}$$

このとき $0\leqq s\leqq 1$ も成立しているから，s のとり得る値の範囲は，

$$\frac{1}{2}\leqq s\leqq\frac{1}{\sqrt{2}} \qquad \cdots\cdots(答)$$

である．

$\boxed{\mathbf{3}}$

(1) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin 2x)\sin x\,dx$ において，$x = \dfrac{\pi}{2} - u$ とおくと，

$$\frac{dx}{du} = -1, \qquad \begin{array}{c|c} x & 0 \to \frac{\pi}{2} \\ \hline u & \frac{\pi}{2} \to 0 \end{array}$$

であることと，

$$\sin 2x = \sin 2\left(\frac{\pi}{2} - u\right) = \sin(\pi - 2u) = \sin 2u,\ \sin x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - u\right) = \cos u$$

であることより，

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin 2x)\sin x\,dx = \int_{\frac{\pi}{2}}^0 f(\sin 2u)\cos u \frac{dx}{du}\,du = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin 2u)\cos u\,du$$

すなわち，

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin 2x)\sin x\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin 2x)\cos x\,dx$$

が成り立つ． (証明終)

(2) $t = \sin x - \cos x$ とおくと，$t = \sqrt{2}\sin\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right)$ より，

$$\frac{dt}{dx} = \cos x + \sin x, \qquad \begin{array}{c|c} x & 0 \ \to \frac{\pi}{2} \\ \hline t & -1 \to 1 \end{array}$$

であるから，

$$t^2 = \sin^2 x - 2\sin x\cos x + \cos^2 x = 1 - \sin 2x \qquad \therefore\quad \sin 2x = 1 - t^2$$

であることと合わせて，

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin 2x)(\sin x + \cos x)\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin 2x)\frac{dt}{dx}\,dx = \int_{-1}^1 f(1 - t^2)\,dt$$

が成り立つ． (証明終)

(3) $I = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{1 + \sqrt{\sin 2x}}\,dx$ とする．(1)，(2) より，

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin 2x)(\sin x + \cos x)\,dx = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin 2x)\sin x\,dx = \int_{-1}^1 f(1 - t^2)\,dt$$

であるから，

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin 2x)\sin x\,dx = \frac{1}{2}\int_{-1}^1 f(1 - t^2)\,dt$$

となる．この等式は $f(x)$ が $0 \leqq x \leqq 1$ で連続であれば成り立つことから，$f(x) = \dfrac{1}{1 + \sqrt{x}}$

として適用すると，

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin 2x)\sin x\,dx$$

より，

$$I=\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}\frac{1}{1+\sqrt{1-t^2}}\,dt$$

となり，$\dfrac{1}{1+\sqrt{1-t^2}}$ が偶関数であることから，

$$I=\int_0^1\frac{1}{1+\sqrt{1-t^2}}\,dt$$

となる．さらに，$t=\sin\theta\ \left(0\leqq\theta\leqq\dfrac{\pi}{2}\right)$ とおくと，

$$\frac{dt}{d\theta}=\cos\theta,\quad \begin{array}{c|c} t & 0\to 1 \\ \hline \theta & 0\to\frac{\pi}{2}\end{array}$$

であるから，

$$\sqrt{1-t^2}=\sqrt{1-\sin^2\theta}=\sqrt{\cos^2\theta}=|\cos\theta|=\cos\theta\ \left(\because\ 0\leqq\theta\leqq\frac{\pi}{2}\right)$$

であることより，

$$\begin{aligned}I&=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{1+\cos\theta}\frac{dt}{d\theta}\,d\theta\\&=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos\theta}{1+\cos\theta}\,d\theta=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(1-\frac{1}{1+\cos\theta}\right)d\theta\\&=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(1-\frac{1}{2\cos^2\dfrac{\theta}{2}}\right)d\theta=\left[\theta-\tan\frac{\theta}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi}{2}-1\end{aligned}$$

$\cdots\cdots$ (答)

となる．