2024年度 東京工業大学 前期 数学

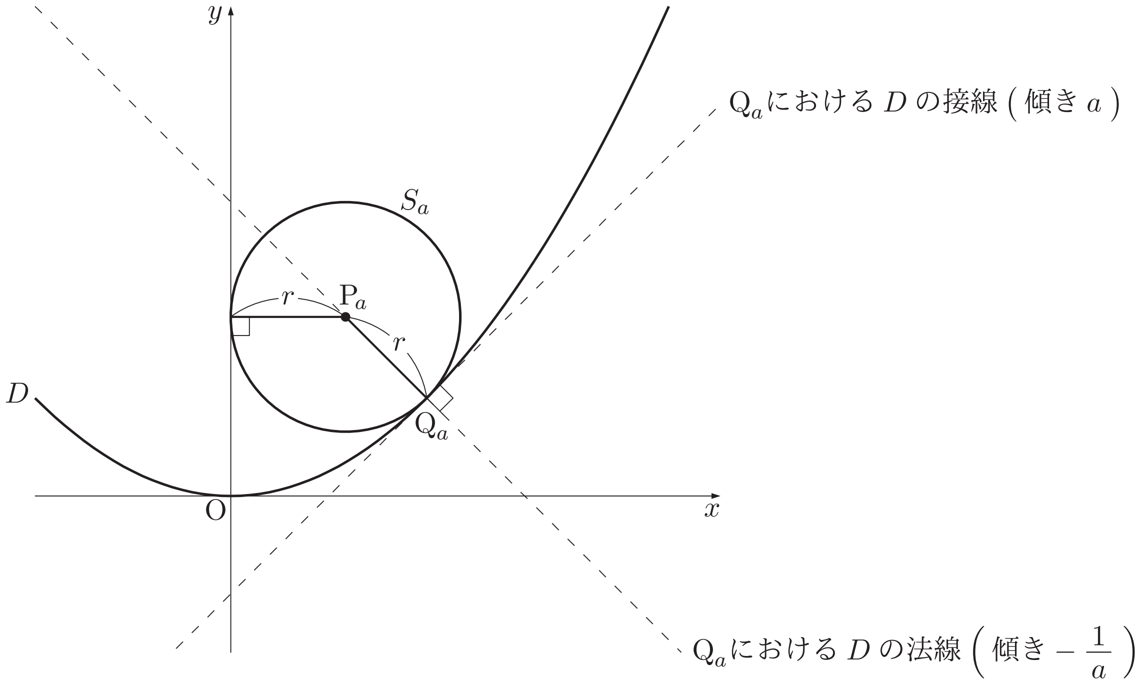
$\boxed{1}$

(1) 曲線 $y=\dfrac{1}{2}x^2$ を D， 点 $\left(a,\ \dfrac{1}{2}a^2\right)$ を Q_a とする．

円 S_a の中心を $\mathrm{P}_a\Big(X(a),\ Y(a)\Big)$， 半径を r とする．

円 S_a は，点 Q_a で曲線 D に接し y 軸の正の部分とも接するから，下図のように点 P_a は点 Q_a の左上側にある．

(点 P_a が Q_a の右下側にあったとすると, 円 S_a が y 軸の正の部分と接することはできない.)



$y=\dfrac{1}{2}x^2$ のとき，$y'=x$ であるから，点 Q_a における曲線 D の法線の傾きは $-\dfrac{1}{a}$ であり，

この法線に平行で左上向き $\left(\text{つまり} \begin{pmatrix} -a \\ 1 \end{pmatrix} \text{と同じ向き}\right)$ の単位ベクトルを $\overrightarrow{n}$ とおくと

$$\overrightarrow{n}=\frac{1}{\sqrt{a^2+1}}\begin{pmatrix} -a \\ 1 \end{pmatrix}$$

である．

P_a は，Q_a から $\overrightarrow{n}$ の向きに長さ r だけ進んだ点であるから

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}_a}=\overrightarrow{\mathrm{OQ}_a}+r\overrightarrow{n}$$

$$\therefore\ \begin{pmatrix} X(a) \\ Y(a) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a \\ \dfrac{1}{2}a^2 \end{pmatrix}+\frac{r}{\sqrt{a^2+1}}\begin{pmatrix} -a \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\therefore\ \begin{cases} X(a)=a+\dfrac{r}{\sqrt{a^2+1}}\cdot(-a) & \cdots\cdots① \\ Y(a)=\dfrac{1}{2}a^2+\dfrac{r}{\sqrt{a^2+1}} & \cdots\cdots② \end{cases}$$

である．

また，S_a は y 軸の右側にあって y 軸と接するから

$$X(a)=r \qquad \cdots\cdots③$$

である．

①,③から

$$a+\frac{r}{\sqrt{a^2+1}}\cdot(-a)=r$$

$$\therefore\ a\sqrt{a^2+1}-ar=\sqrt{a^2+1}\,r$$

$$\therefore\ (\sqrt{a^2+1}+a)r=a\sqrt{a^2+1}$$

$$\therefore\ \frac{r}{\sqrt{a^2+1}}=\frac{a}{\sqrt{a^2+1}+a}$$

$$=a(\sqrt{a^2+1}-a)$$

である．これを①,②に代入して整理すると

$$X(a)=a^3+a-a^2\sqrt{a^2+1}$$

$$Y(a)=a\sqrt{a^2+1}-\frac{a^2}{2}$$

である．

$\mathrm{P}\Big(X(1),\ Y(1)\Big)$ であるから

$$\mathrm{P}\left(2-\sqrt{2},\ \ \sqrt{2}-\frac{1}{2}\right) \qquad \cdots\cdots(答)$$

である．

(2) 曲線 C の媒介変数表示は

$$\begin{cases} x=X(a) \\ y=Y(a) \end{cases}$$

であり

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\dfrac{dy}{da}}{\dfrac{dx}{da}}=\frac{Y'(a)}{X'(a)}$$

である．

ゆえに，求める傾きを m とおくと，m は $a=1$ のときの $\dfrac{dy}{dx}\left(=\dfrac{Y'(a)}{X'(a)}\right)$ の値であるから

$$m=\frac{Y'(1)}{X'(1)}$$

である．

$$X'(a)=3a^2+1-\left(2a\sqrt{a^2+1}+a^2\cdot\frac{2a}{2\sqrt{a^2+1}}\right)$$

$$Y'(a)=1\cdot\sqrt{a^2+1}+a\cdot\frac{2a}{2\sqrt{a^2+1}}-a$$

であるから

$$X'(1)=4-\left(2\sqrt{2}+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=\frac{8-5\sqrt{2}}{2}$$

$$Y'(1)=\sqrt{2}+\frac{1}{\sqrt{2}}-1=\frac{3\sqrt{2}-2}{2}$$

である．ゆえに

$$m=\frac{Y'(1)}{X'(1)}=\frac{3\sqrt{2}-2}{8-5\sqrt{2}}=1+\sqrt{2} \qquad \cdots\cdots \text{(答)}$$

である．

(1) の別解

曲線 $y=\frac{1}{2}x^2$ を D，点 $\left(a,\ \frac{1}{2}a^2\right)$ を Q_a とし，

円 S_a の中心を $\mathrm{P}_a\Big(X(a),\ Y(a)\Big)$，半径を r とする．

$y=\frac{1}{2}x^2$ のとき，$y'=x$ であるから，点 Q_a における曲線 D の法線の方程式は

$$y-\frac{1}{2}a^2=-\frac{1}{a}(x-a) \qquad \cdots\cdots④$$

である．

$\mathrm{P}_a\Big(X(a),\ Y(a)\Big)$ は直線④上にあるから

$$Y(a)-\frac{1}{2}a^2=-\frac{1}{a}\Big(X(a)-a\Big) \qquad \cdots\cdots⑤$$

である．

また，S_a は y 軸の右側にあって y 軸と接するから

$$X(a)=r \qquad \cdots\cdots⑥$$

であり

$$r=\mathrm{P}_a\mathrm{Q}_a=\sqrt{\Big(X(a)-a\Big)^2+\left(Y(a)-\frac{1}{2}a^2\right)^2} \qquad \cdots\cdots⑦$$

である．

⑥,⑦より

$$\Big(X(a)\Big)^2=\Big(X(a)-a\Big)^2+\left(Y(a)-\frac{1}{2}a^2\right)^2$$

であり，ここに⑤を代入すると

$$\Big(X(a)\Big)^2=\Big(X(a)-a\Big)^2+\frac{1}{a^2}\Big(X(a)-a\Big)^2$$

$$\therefore\ \Big(X(a)\Big)^2=\Big(1+\frac{1}{a^2}\Big)\Big(X(a)-a\Big)^2$$

$$\therefore\ X(a)=\pm\sqrt{1+\frac{1}{a^2}}\Big(X(a)-a\Big) \qquad \cdots\cdots ⑧$$

となるが，$0<X(a)<a$ より

$$X(a)>0,\quad X(a)-a<0$$

であるから，⑧に現れる複号は $-$ であり

$$X(a)=-\sqrt{1+\frac{1}{a^2}}\Big(X(a)-a\Big)$$

$$\therefore\ aX(a)=-\sqrt{a^2+1}\,X(a)+a\sqrt{a^2+1}$$

$$\therefore\ (\sqrt{a^2+1}+a)\,X(a)=a\sqrt{a^2+1}$$

$$\therefore\ X(a)=\frac{a\sqrt{a^2+1}}{\sqrt{a^2+1}+a}$$

$$=a\sqrt{a^2+1}\,(\sqrt{a^2+1}-a)$$

$$=a^3+a-a^2\sqrt{a^2+1}$$

である．これを⑤に代入してすると

$$Y(a)-\frac{a^2}{2}=-\frac{1}{a}(a^3-a^2\sqrt{a^2+1}\,)$$

$$\therefore\ Y(a)=a\sqrt{a^2+1}-\frac{a^2}{2}$$

を得る．

$\mathrm{P}\Big(X(1),\ Y(1)\Big)$ であるから

$$\mathrm{P}\Big(2-\sqrt{2},\ \sqrt{2}-\frac{1}{2}\Big) \qquad \cdots\cdots\ (答)$$

である．

$\boxed{2}$

$$f'(t) = -f(t)g(t) \qquad \cdots\cdots ①$$
$$g'(t) = \{f(t)\}^2 \qquad \cdots\cdots ②$$
$$f(t) > 0 \qquad \cdots\cdots ③$$
$$|g(t)| < 1 \qquad \cdots\cdots ④$$
$$f(0) = 1 \qquad \cdots\cdots ⑤$$
$$g(0) = 0 \qquad \cdots\cdots ⑥$$

とする．

(1)　$p(t) = \{f(t)\}^2 + \{g(t)\}^2$ より，

$$\begin{aligned} p'(t) &= 2f(t)f'(t) + 2g(t)g'(t) \\ &= 2f(t)\{-f(t)g(t)\} + 2g(t)\{f(t)\}^2 \qquad (①, ②より) \\ &= 0 \qquad \cdots\cdots(答) \end{aligned}$$

である．

(2)　(1) より，$p(t)$ は定数関数であり，⑤, ⑥より，

$$p(0) = \{f(0)\}^2 + \{g(0)\}^2 = 1$$

であるから，すべての実数 t に対して

$$p(t) = \{f(t)\}^2 + \{g(t)\}^2 = 1 \qquad \cdots\cdots ⑦$$

が成り立つ．

また，④より，$1 + g(t) > 0$, $1 - g(t) > 0$ であるから，

$$q(t) = \log \frac{1 + g(t)}{1 - g(t)} = \log\{1 + g(t)\} - \log\{1 - g(t)\}$$

と変形できる．よって，

$$\begin{aligned} q'(t) &= \frac{g'(t)}{1 + g(t)} - \frac{-g'(t)}{1 - g(t)} \\ &= \frac{2g'(t)}{1 - \{g(t)\}^2} \\ &= \frac{2\{f(t)\}^2}{\{f(t)\}^2} \qquad (②, ⑦より) \\ &= 2 \end{aligned}$$

すなわち $q'(t)$ は定数関数である．　(証明おわり)

(3)　(2) より，ある実数 C を用いて

$$q(t)=2t+C$$

とおける．

ここで $t=0$ とすると，$q(0)=C$ であり，一方，$q(t)$ の定義と⑥より，

$$q(0)=\log\frac{1+g(0)}{1-g(0)}=\log 1=0$$

であるから，$C=0$ である．よって，$\log\dfrac{1+g(t)}{1-g(t)}=2t$ となり，これより

$$\frac{1+g(t)}{1-g(t)}=e^{2t},\ \text{すなわち}\ g(t)=\frac{e^{2t}-1}{e^{2t}+1}$$

とわかる．

したがって，

$$\lim_{t\to\infty}g(t)=\lim_{t\to\infty}\frac{1-e^{-2t}}{1+e^{-2t}}=1 \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

である．

(4)　動点 P を P$(f(t),g(t))$ とおくと，⑦より，P はつねに単位円周 $x^2+y^2=1$ 上にある．とくに⑤, ⑥より，$t=0$ のとき P$(1,0)$ である．

また，②, ③より，$g'(t)>0$ であるから，$g(t)$ は増加関数である．

これと⑥より $t>0$ において $g(t)>0$ である．

よって，正の実数 T に対して $f(T)=g(T)$ が成り立つとき，⑦と合わせて

$$\{f(T)\}^2+\{g(T)\}^2=2\{g(T)\}^2=1$$

より，$g(T)=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ であるから，結局

$$f(T)=g(T)=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

とわかる．

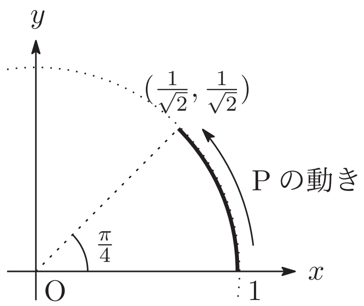
($g(t)$ は連続で，$g(0)=0$ かつ $\displaystyle\lim_{t\to\infty}g(t)=1$ ((3) より) であるから，$g(T)=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ を満たす正の実数 T は存在する)

$f(t)$, $g(t)$ は連続であるから，t が $0\leqq t\leqq T$ を動くとき，P は円周 $x^2+y^2=1$ 上を $(1,0)$ から $\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}},\ \dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$ まで反時計回りに動く．

したがって，求める長さは

$$\frac{\pi}{4} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

である．

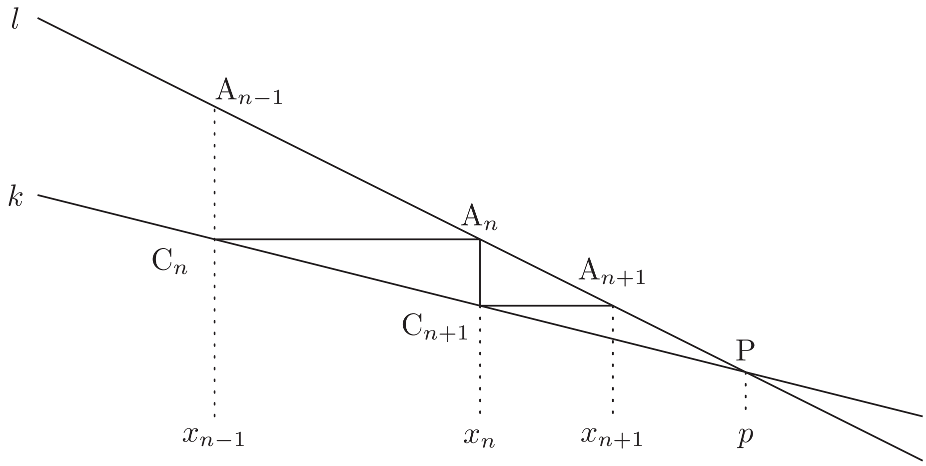


【注】

$f(t)$ を具体的に求めると，$f(t)=\dfrac{2}{e^{t}+e^{-t}}$ となる．

$\boxed{3}$

(1) $\mathrm{A}_0 = \mathrm{A},\ \mathrm{C}_0 = \mathrm{C}$ と定める.



（図は縦方向に縮小したものである）

$\ell : y = -\dfrac{b}{a}(x-a),\ k : y = -\dfrac{a}{b}(x+a)$ であるから, A_n の x 座標を x_n とおくと

$$\mathrm{A}_n\left(x_n,\ -\frac{b}{a}(x_n-a)\right),\quad \mathrm{C}_{n+1}\left(x_n,\ -\frac{a}{b}(x_n+a)\right),\quad \mathrm{A}_{n+1}\left(x_{n+1},\ -\frac{b}{a}(x_{n+1}-a)\right)$$

である. A_{n+1} と C_{n+1} の y 座標は等しいので

$$-\frac{b}{a}(x_{n+1}-a) = -\frac{a}{b}(x_n+a) \qquad \cdots\cdots①$$

である. 一方, ℓ と k の交点を P とし, その x 座標を p とすると

$$-\frac{b}{a}(p-a) = -\frac{a}{b}(p+a) \qquad \cdots\cdots②$$

が成り立つ. これを p について解くと

$$p = \frac{a(b^2+a^2)}{b^2-a^2}$$

となり, ① − ② より

$$-\frac{b}{a}(x_{n+1}-p) = -\frac{a}{b}(x_n-p) \quad \text{すなわち} \quad x_{n+1}-p = \frac{a^2}{b^2}(x_n-p)$$

である. よって, $\{x_n - p\}$ は初項が

$$x_0 - p = a - \frac{a(b^2+a^2)}{b^2-a^2} = -\frac{2a^3}{b^2-a^2} \qquad \cdots\cdots③$$

で, 公比が $\dfrac{a^2}{b^2}$ である等比数列であるから

$$x_n - p = -\frac{2a^3}{b^2-a^2}\left(\frac{a^2}{b^2}\right)^n \qquad \cdots\cdots④$$

すなわち

$$x_n = p - \frac{2a^3}{b^2-a^2}\left(\frac{a}{b}\right)^{2n}$$
$$= \frac{a(b^2+a^2)}{b^2-a^2} - \frac{2a^3}{b^2-a^2}\left(\frac{a}{b}\right)^{2n}$$

である. A_n の y 座標を y_n とおくと, ③, ④より

$$y_n = -\frac{b}{a}(x_n - a)$$
$$= -\frac{b}{a}\{(x_n-p)-(x_0-p)\}$$
$$= -\frac{b}{a}\left\{-\frac{2a^3}{b^2-a^2}\left(\frac{a^2}{b^2}\right)^n - \left(-\frac{2a^3}{b^2-a^2}\right)\right\}$$
$$= \frac{2a^2b}{b^2-a^2}\left\{\left(\frac{a}{b}\right)^{2n} - 1\right\}$$

であり, $n \geqq 1$ のとき C_n の座標は $(x_{n-1},\ y_n)$ であるから

$$\mathrm{A}_n\left(\frac{a(b^2+a^2)}{b^2-a^2} - \frac{2a^3}{b^2-a^2}\left(\frac{a}{b}\right)^{2n},\ \frac{2a^2b}{b^2-a^2}\left\{\left(\frac{a}{b}\right)^{2n}-1\right\}\right) \quad \cdots\cdots(\text{答})$$

$$\mathrm{C}_n\left(\frac{a(b^2+a^2)}{b^2-a^2} - \frac{2a^3}{b^2-a^2}\left(\frac{a}{b}\right)^{2(n-1)},\ \frac{2a^2b}{b^2-a^2}\left\{\left(\frac{a}{b}\right)^{2n}-1\right\}\right) \quad \cdots\cdots(\text{答})$$

である. (この結果は $n=0$ でも成り立つ.)

(2) $\triangle$CBA の面積 S_0 は

$$S_0 = \frac{1}{2}\cdot 2a \cdot b = ab$$

である. $\triangle$CBA の底辺を BA, $\triangle \mathrm{CBA}_n$ の底辺を BA_n とみると, 高さは共通なので

$$S_n = S_0 \cdot \frac{\mathrm{BA}_n}{\mathrm{BA}} = ab\cdot\frac{x_n}{a} = bx_n = \frac{ab(b^2+a^2)}{b^2-a^2} - \frac{2a^3b}{b^2-a^2}\left(\frac{a}{b}\right)^{2n} \quad \cdots\cdots(\text{答})$$

である.

(3) $\dfrac{\mathrm{BA}_n}{\mathrm{BC}} = \dfrac{\mathrm{BA}_n}{\mathrm{BA}} = \dfrac{x_n}{a}$ である. ここで, $0 < \dfrac{a}{b} < 1$ より $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a}{b}\right)^{2n} = 0$ であるから

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \frac{a(b^2+a^2)}{b^2-a^2}$$

である. よって

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\mathrm{BA}_n}{\mathrm{BC}} = \frac{1}{a}\cdot\frac{a(b^2+a^2)}{b^2-a^2} = \frac{b^2+a^2}{b^2-a^2} \quad \cdots\cdots(\text{答})$$

である.

$\boxed{4}$

(1) $X_1 = p_1 = \dfrac{1}{3}$ である．X_{n+1} を X_n で表そう．C_1，……，C_n，C_{n+1} を投げたとき表が出た硬貨の枚数が奇数となるのは，次のいずれかの場合である．

- C_1，……，C_n のうち表が出たものの枚数が奇数で，C_{n+1} は裏が出る
- C_1，……，C_n のうち表が出たものの枚数が偶数で，C_{n+1} は表が出る

よって

$$X_{n+1} = X_n \cdot \frac{2}{3} + (1 - X_n) \cdot \frac{1}{3} \qquad \cdots\cdots ①$$

すなわち

$$X_{n+1} = \frac{1}{3}X_n + \frac{1}{3}$$

である．これは

$$X_{n+1} - \frac{1}{2} = \frac{1}{3}\left(X_n - \frac{1}{2}\right)$$

と変形できるので，

$$X_n - \frac{1}{2} = \left(X_1 - \frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} = \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} = -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^{n}$$

である．よって

$$X_n = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^{n} \qquad \cdots\cdots (答)$$

である．

(2) $Y_1 = p_1 = \dfrac{1}{4}$ である．①を導いた所と同じ考え方により

$$Y_{n+1} = Y_n \cdot \left(1 - \frac{1}{2(n+2)}\right) + (1 - Y_n) \cdot \frac{1}{2(n+2)}$$

であり，分母を払って整理すると

$$(n+2)Y_{n+1} = (n+1)Y_n + \frac{1}{2}$$

となる．よって，数列 $\{(n+1)Y_n\}$ は公差 $\dfrac{1}{2}$ の等差数列だから，

$$(n+1)Y_n = 2Y_1 + (n-1) \cdot \frac{1}{2} = 2 \cdot \frac{1}{4} + (n-1) \cdot \frac{1}{2} = \frac{n}{2}$$

である．よって

$$Y_n = \frac{n}{2(n+1)} \qquad \cdots\cdots (答)$$

である．

(3) C_1，……，C_k を投げたときに表が出た硬貨の枚数が奇数である確率を W_k とおく．
$W_0 = 0$ とすると，①を導いた所と同じ考え方により，$1 \leqq k \leqq m$ のとき

$$W_k = W_{k-1} \cdot \left(1 - \frac{1}{3m}\right) + (1 - W_{k-1}) \cdot \frac{1}{3m}$$

すなわち

$$W_k = \left(1 - \frac{2}{3m}\right)W_{k-1} + \frac{1}{3m}$$

である．これを変形することにより

$$W_k-\frac{1}{2}=\left(1-\frac{2}{3m}\right)\left(W_{k-1}-\frac{1}{2}\right)\qquad (\,1\leqq k\leqq m\,)$$

が得られるので，

$$W_m-\frac{1}{2}=\left(W_0-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{2}{3m}\right)^m=-\frac{1}{2}\left(1-\frac{2}{3m}\right)^m \qquad \cdots\cdots ②$$

である．

$m+1\leqq k\leqq 2m$ のとき

$$W_k=W_{k-1}\cdot\left(1-\frac{2}{3m}\right)+(1-W_{k-1})\cdot\frac{2}{3m}$$

すなわち

$$W_k=\left(1-\frac{4}{3m}\right)W_{k-1}+\frac{2}{3m}$$

である．これを変形することにより

$$W_k-\frac{1}{2}=\left(1-\frac{4}{3m}\right)\left(W_{k-1}-\frac{1}{2}\right)\qquad (\,m+1\leqq k\leqq 2m\,)$$

が得られるので，②も用いて

$$W_{2m}-\frac{1}{2}=\left(W_m-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{4}{3m}\right)^m=-\frac{1}{2}\left(1-\frac{2}{3m}\right)^m\left(1-\frac{4}{3m}\right)^m \qquad \cdots\cdots ③$$

である．

$2m+1\leqq k\leqq 3m$ のとき

$$W_k=W_{k-1}\cdot\left(1-\frac{1}{m}\right)+(1-W_{k-1})\cdot\frac{1}{m}$$

すなわち

$$W_k=\left(1-\frac{2}{m}\right)W_{k-1}+\frac{1}{m}$$

である．これを変形することにより

$$W_k-\frac{1}{2}=\left(1-\frac{2}{m}\right)\left(W_{k-1}-\frac{1}{2}\right)\qquad (\,2m+1\leqq k\leqq 3m\,)$$

が得られるので，③も用いて

$$W_{3m}-\frac{1}{2}=\left(W_{2m}-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{2}{m}\right)^m=-\frac{1}{2}\left(1-\frac{2}{3m}\right)^m\left(1-\frac{4}{3m}\right)^m\left(1-\frac{2}{m}\right)^m$$

である．

よって

$$Z_{3m}=W_{3m}=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\left(1-\frac{2}{3m}\right)^m\left(1-\frac{4}{3m}\right)^m\left(1-\frac{2}{m}\right)^m$$

である．$\displaystyle\lim_{h\to 0}(1+h)^{\frac{1}{h}}=e$ が使えるように変形すると

$$Z_{3m}=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\left(\left(1+\frac{-2}{3m}\right)^{\frac{3m}{-2}}\right)^{\frac{-2}{3}}\left(\left(1+\frac{-4}{3m}\right)^{\frac{3m}{-4}}\right)^{\frac{-4}{3}}\left(\left(1+\frac{-2}{m}\right)^{\frac{m}{-2}}\right)^{-2}$$

となるから

$$\lim_{m\to\infty}Z_{3m}=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}e^{\frac{-2}{3}}e^{\frac{-4}{3}}e^{-2}=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}e^{-4} \qquad \cdots\cdots (答)$$

である．

$\boxed{5}$

2 次方程式$f(x)=0$の 2 解をα_1, α_2とおく（$\alpha_1=\alpha_2$の場合も含む）と，解と係数の関係より，

$$\alpha_1+\alpha_2=-a \qquad \cdots\cdots①$$

$$\alpha_1\alpha_2=b \qquad \cdots\cdots②$$

が成り立つ．

2 次方程式$f(x)=0$の複素数の範囲のすべての解αに対して，$\alpha^n=1$となる正の整数nが存在するとき，

$$|\alpha^n|=1$$

$$\therefore\quad |\alpha|^n=1$$

$$\therefore\quad |\alpha|=1$$

であるから，

$$|\alpha_1|=|\alpha_2|=1 \qquad \cdots\cdots③$$

が必要である．

(i) α_1, α_2がともに実数のとき

③より，

$$(\alpha_1, \alpha_2)=(1,1),(1,-1),(-1,1),(-1,-1)$$

の 4 つの場合が考えられ，いずれも$\alpha_1{}^2=1$かつ$\alpha_2{}^2=1$を満たす．そして，各場合について，

$$(\alpha_1+\alpha_2, \alpha_1\alpha_2)=(2,1),(0,-1),(0,-1),(-2,1)$$

となる．よって，①，②より，これらに対応するa, bの組は，

$$(a,b)=(-2,1),(0,-1),(2,1)$$

である．

したがって，方程式$f(x)=0$のすべての解αに対して，$\alpha^n=1$となる正の整数nが存在するような整数の組(a,b)は，

$$(a,b)=(-2,1),(0,-1),(2,1)$$

である．

(ii) α_1, α_2がともに虚数のとき

$f(x)=0$は実数係数の 2 次方程式であるから，その一方の解α_1に対し，もう一方の解α_2は，$\alpha_2=\overline{\alpha_1}$を満たす．

また，②，③より，

$$b=\alpha_1\overline{\alpha_1}=|\alpha_1|^2=1^2=1 \qquad \cdots\cdots②'$$

である．

そして，α_1, α_2がともに虚数であることより，$f(x)=0$の判別式は負の値をとるから，

$$a^2-4b<0 \qquad \cdots\cdots④$$

である．よって，②’，④より，

$$a^2-4<0$$

$$\therefore\quad -2<a<2$$

であり，a は整数であるから，

$$a=0,\pm 1$$

に限られる．

$(a,b)=(0,1)$ のとき，$f(x)=x^2+1$ より，方程式 $f(x)=0$ の解は，

$$x=\pm i=\cos\left(\pm\frac{\pi}{2}\right)+i\sin\left(\pm\frac{\pi}{2}\right)\ \text{（複号同順）}$$

であり，

$$\left\{\cos\left(\pm\frac{\pi}{2}\right)+i\sin\left(\pm\frac{\pi}{2}\right)\right\}^4=\cos(\pm 2\pi)+i\sin(\pm 2\pi)=1\ \text{（複号同順）}$$

であるから，$\alpha_1{}^4=\alpha_2{}^4=1$ が成り立つ．

$(a,b)=(1,1)$ のとき，$f(x)=x^2+x+1$ より，方程式 $f(x)=0$ の解は，

$$x=\frac{-1\pm\sqrt{3}i}{2}=\cos\left(\pm\frac{2\pi}{3}\right)+i\sin\left(\pm\frac{2\pi}{3}\right)\ \text{（複号同順）}$$

であり，

$$\left\{\cos\left(\pm\frac{2\pi}{3}\right)+i\sin\left(\pm\frac{2\pi}{3}\right)\right\}^3=\cos(\pm 2\pi)+i\sin(\pm 2\pi)=1\ \text{（複号同順）}$$

であるから，$\alpha_1{}^3=\alpha_2{}^3=1$ が成り立つ．

$(a,b)=(-1,1)$ のとき，$f(x)=x^2-x+1$ より，方程式 $f(x)=0$ の解は，

$$x=\frac{1\pm\sqrt{3}i}{2}=\cos\left(\pm\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(\pm\frac{\pi}{3}\right)\ \text{（複号同順）}$$

であり，

$$\left\{\cos\left(\pm\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(\pm\frac{\pi}{3}\right)\right\}^6=\cos(\pm 2\pi)+i\sin(\pm 2\pi)=1\ \text{（複号同順）}$$

であるから，$\alpha_1{}^6=\alpha_2{}^6=1$ が成り立つ．

したがって，方程式 $f(x)=0$ のすべての解 α に対して，$\alpha^n=1$ となる正の整数 n が存在するような整数の組 (a,b) は，

$$(a,b)=(0,1),(1,1),(-1,1)$$

である．

(i)(ii)より，題意を満たす整数の組 (a,b) は，

$$(a,b)=(\pm 2,1),(0,\pm 1),(\pm 1,1)\qquad\cdots\cdots\text{（答）}$$

である．