2024年度 東京大学 前期 数学 文系

文科第1問

(1) $0^\circ < \theta < 90^\circ$ より $0 < \cos\theta < 1$ である．放物線 C が 2 点 P，Q を通るとき，

$$\begin{cases} a\cos^2\theta + b\cos\theta + c = \sin\theta \\ a\cos^2\theta - b\cos\theta + c = \sin\theta \end{cases}$$

がともに成り立つので，$\cos\theta \neq 0$ より，

$$b = 0 \qquad \cdots\cdots(答)$$

である．このとき，$C: y = ax^2 + c$ であるから，

$$a\cos^2\theta + c = \sin\theta \qquad \cdots\cdots①$$

が成り立つ．$y = ax^2 + c$ のとき $y' = 2ax$ であるから，P における接線の方程式は，

$$y = (2a\cos\theta)(x - \cos\theta) + \sin\theta \quad すなわち \quad y = (2a\cos\theta)x - 2a\cos^2\theta + \sin\theta$$

である．これが P における円 $x^2 + y^2 = 1$ の接線 $(\cos\theta)x + (\sin\theta)y = 1$，すなわち，

$$y = -\frac{\cos\theta}{\sin\theta}x + \frac{1}{\sin\theta} \quad (\because \sin\theta \neq 0)$$

と一致するので，

$$2a\cos\theta = -\frac{\cos\theta}{\sin\theta} \quad かつ \quad -2a\cos^2\theta + \sin\theta = \frac{1}{\sin\theta}$$

が成り立つ．①より，$a\cos^2\theta = \sin\theta - c$ であるから，$s = \sin\theta$ として

$$2a = -\frac{1}{s}, \qquad -2(s - c) + s = \frac{1}{s}$$

すなわち，

$$a = -\frac{1}{2s}, \qquad c = \frac{s^2+1}{2s} \qquad \cdots\cdots(答)$$

である．

(2) 放物線 C は，$s = \sin\theta$ を用いて $y = -\frac{1}{2s}x^2 + \frac{s^2+1}{2s}$ である．C の x 軸との交点の x 座標は，

$$-\frac{1}{2s}x^2 + \frac{s^2+1}{2s} = 0$$

を解いて，

$$x^2 = s^2 + 1 \quad すなわち \quad x = \pm\sqrt{s^2+1}$$

であるから，求める面積は，

$$\begin{aligned} A &= \int_{-\sqrt{s^2+1}}^{\sqrt{s^2+1}} \left\{ -\frac{1}{2s}\left(x + \sqrt{s^2+1}\right)\left(x - \sqrt{s^2+1}\right) \right\} dx \\ &= \frac{1}{12s}\left(2\sqrt{s^2+1}\right)^3 = \frac{2(\sqrt{s^2+1})^3}{3s} \qquad \cdots\cdots(答) \end{aligned}$$

である．

(3) (2) より，

$$A = \frac{2}{3}\sqrt{\frac{(s^2+1)^3}{s^2}} = \frac{2}{3}\sqrt{\left(\frac{s^2+1}{s^{\frac{2}{3}}}\right)^3}$$

である．ここで，$s^{\frac{4}{3}} > 0$，$s^{-\frac{2}{3}} > 0$ と相加平均と相乗平均の大小関係より，

$$\begin{aligned} \frac{s^2+1}{s^{\frac{2}{3}}} &= s^{\frac{4}{3}} + s^{-\frac{2}{3}} \\ &= s^{\frac{4}{3}} + \frac{1}{2}s^{-\frac{2}{3}} + \frac{1}{2}s^{-\frac{2}{3}} \\ &\geqq 3\sqrt[3]{s^{\frac{4}{3}} \cdot \frac{1}{2}s^{-\frac{2}{3}} \cdot \frac{1}{2}s^{-\frac{2}{3}}} = 3\sqrt[3]{\frac{1}{4}} \end{aligned}$$

であるから，

$$A \geqq \frac{2}{3}\sqrt{\left(3\sqrt[3]{\frac{1}{4}}\right)^3} = \frac{2}{3}\sqrt{3^3 \cdot \frac{1}{4}} = \sqrt{3}$$

である． (証明終)

(別解)　(2) より，

$$A \geqq \sqrt{3} \iff \frac{4(s^2+1)^3}{9s^2} \geqq 3 \qquad \cdots\cdots ②$$

であり，$s^2 = X$ とすると，X の値域は $0 < X < 1$ であるから

$$\begin{aligned} ② &\iff 4(X+1)^3 \geqq 27X \\ &\iff 4(X+1)^3 - 27X \geqq 0 \end{aligned}$$

となる．以下，この不等式が $0 < X < 1$ でつねに成り立つことを示せば良い．

$g(X) = 4(X+1)^3 - 27X$ とすると，

$$g'(X) = 12(X+1)^3 - 27 = 3\{2(X+1)+3\}\{2(X+1)-3\} = 3(2X+5)(2X-1)$$

であるから，X の増加に伴う $g(X)$ の増減は次のようになる．

X	(0)	$\cdots$	$\frac{1}{2}$	$\cdots$	(1)
$g'(X)$		$-$	0	$+$	
$g(X)$		$\searrow$	$g\left(\frac{1}{2}\right)$	$\nearrow$	

よって，

$$g(X) \geqq g\left(\frac{1}{2}\right) = 4\left(\frac{3}{2}\right)^3 - 27 \cdot \frac{1}{2} = 0$$

であるから，$0 < X < 1$ においてつねに $g(X) \geqq 0$ が成り立つ．したがって，$A \geqq \sqrt{3}$ である．　(証明終)

2024年度 東京大学 前期 数学 文系

文 科 第 2 問

(1)
$$5^n > 10^{19} \iff n\log_{10}5 > 19$$
$$\iff n\log_{10}\frac{10}{2} > 19$$
$$\iff n(1-\log_{10}2) > 19$$
$$\iff n > \frac{19}{1-\log_{10}2} \quad (\because\ 1-\log_{10}2>0) \quad \cdots\cdots\cdots\cdots ①$$

である．

ここで，$0.3 < \log_{10}2 < 0.31$ より，
$$\frac{19}{1-0.3} < \frac{19}{1-\log_{10}2} < \frac{19}{1-0.31}$$
$$\therefore\ \frac{19}{0.7} < \frac{19}{1-\log_{10}2} < \frac{19}{0.69}$$
$$\therefore\ 27.14\cdots < \frac{19}{1-\log_{10}2} < 27.53\cdots$$

よって，
$$27 < \frac{19}{1-\log_{10}2} < 28 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots ②$$

であるから，①，②より，求める最小の自然数 n は，

28

である．

(2) 5^m+4^m は自然数 m の増加に伴い増加することに注意する．

$5^m+4^m > 5^m$ であるから，(1)より，
$$5^{28}+4^{28} > 10^{19}$$
が成立し，

「求める最小の自然数 m は28以下である．」 $\cdots\cdots\cdots\cdots ③$

一方，$0.3 < \log_{10}2 < 0.31$ より，
$$\begin{aligned}\log_{10}5^{27} &= 27(1-\log_{10}2)\\ &< 27(1-0.3)\\ &= 18.9\\ &= 18+3\cdot 0.3\\ &< 18+3\log_{10}2\\ &= \log_{10}(8\cdot 10^{18})\end{aligned}$$
$$\begin{aligned}\log_{10}4^{27} &= 27\cdot 2\log_{10}2\\ &< 54\cdot 0.31\\ &= 16.74\\ &< 18\\ &= \log_{10}10^{18}\end{aligned}$$

であるから，
$$\begin{aligned}5^{27}+4^{27} &< 8\cdot 10^{18}+10^{18}\\ &= 9\cdot 10^{18}\\ &< 10^{19}\end{aligned}$$

である．

よって，

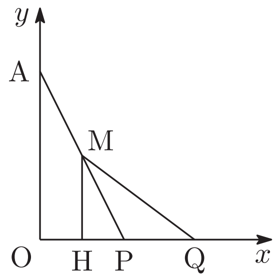
「$m = 27$ は $5^m + 4^m > 10^{19}$ を満たさない.」　…………④

したがって，③と④より，求める最小の自然数 m は，

$$28$$

である．

文 科 第 3 問



(1) $\theta = \angle\mathrm{OAP}$ とおくと,

$$\tan\theta = \frac{\mathrm{OP}}{\mathrm{OA}} = \frac{p}{1} = p$$

である．M から x 軸に垂線 MH を引くと,

$$\tan\angle\mathrm{HMQ} = \tan 2\theta = \frac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta} = \frac{2p}{1-p^2}$$

である．よって

$$q = \mathrm{OH} + \mathrm{HQ} = \mathrm{OH} + \mathrm{HM}\tan\angle\mathrm{HMQ} = \frac{p}{2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{2p}{1-p^2} = \frac{3p-p^3}{2-2p^2}$$

である．

(2) $q = \dfrac{1}{3}$ となるのは $\dfrac{3p-p^3}{2-2p^2} = \dfrac{1}{3}$ のときであり，分母を払って整理すると

$$(p-2)(3p^2+4p-1) = 0$$

となる．$0 < p < 1$ の範囲の p でこれを満たすものは

$$p = \frac{-2+\sqrt{7}}{3}$$

である．

(3) S を p で表すと

$$S = \frac{1}{2}\cdot\mathrm{OA}\cdot\mathrm{OP} = \frac{1}{2}\cdot 1\cdot p = \frac{p}{2}$$

となる．T を p で表すと

$$T = \frac{1}{2}\cdot\mathrm{PQ}\cdot\mathrm{HM} = \frac{1}{2}\cdot(q-p)\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{4}\left(\frac{3p-p^3}{2-2p^2} - p\right)$$

となり，整理すると

$$T = \frac{p+p^3}{8-8p^2}$$

となる．よって，$S > T$ は

$$\frac{p}{2} > \frac{p+p^3}{8-8p^2}$$

となり，両辺を $p\,(>0)$ で割って整理すると

$$p^2 < \frac{3}{5}$$

となる．$0 < p < 1$ に注意して解くと

$$0 < p < \sqrt{\frac{3}{5}}$$

となる．

2024年度 東京大学 前期 数学 文系

文科第４問

n 個の頂点から異なる４点を選ぶ方法は

$${}_{n}\mathrm{C}_4 \text{ 通り} \qquad \cdots\cdots①$$

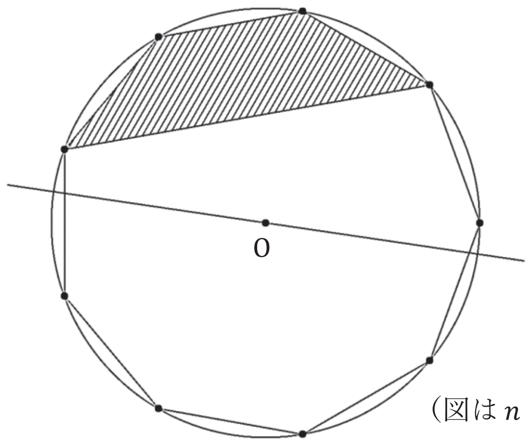
あり，これらは同様に確からしい．

選んだ４点を頂点とする四角形を S とすると，事象 A「S が点 O を内部に含む」の余事象 $\overline{A}$ は

「S が点 O を内部に含まない」 ……②

であり，①のうち②をみたすような選び方の数を求める．

n を７以上の奇数として，$n=2k+1$（k は３以上の整数）とおく．このとき，正 n 角形のどの２つの頂点を選んでも，その２点を通る直線は O を通らないことに注意する．



（図は $n=9\ (k=4)$ のとき）

正 n 角形の頂点を反時計回りに $\mathrm{A}_1,\ \mathrm{A}_2,\ \cdots,\ \mathrm{A}_{2k+1}$ とする．

S が②をみたすとき，S の４つの頂点はいずれも O を通るある直線で分けられた領域の片側に存在する．このとき，劣弧 $\mathrm{A}_m\mathrm{A}_{m+k}$（$1 \leqq m \leqq 2k+1$）上に４つの頂点が存在するような頂点 A_m がただ１つ存在する．ここで，$m+k \geqq 2k+2$ のときは，$\mathrm{A}_{2k+2}=\mathrm{A}_1$，$\mathrm{A}_{2k+3}=\mathrm{A}_2$，… のようにとるものとする．

劣弧 $\mathrm{A}_m\mathrm{A}_{m+k}$ 上の A_m 以外の k 個の頂点から３つを選ぶ方法は ${}_{k}\mathrm{C}_3$ 通りあり，その３点と A_m の計４点からなる S は②をみたす．

m を１から $2k+1$ まで動かして，それぞれの m に対して以上のように４点を選んで得られる S はいずれも異なるから，②をみたす４つの頂点の選び方は

$$(2k+1)\cdot {}_{k}\mathrm{C}_3 \text{ 通り}$$

となる．

よって，求める確率は

$$P(A)=1-P\left(\overline{A}\right)=1-\frac{(2k+1)\cdot {}_{k}\mathrm{C}_3}{{}_{n}\mathrm{C}_4}=1-\frac{(2k+1)\cdot\dfrac{1}{6}k(k-1)(k-2)}{\dfrac{1}{24}(2k+1)\cdot 2k\cdot(2k-1)(2k-2)}$$

$$= 1 - \frac{k-2}{2k-1} = \frac{k+1}{2k-1} = \frac{\frac{n-1}{2}+1}{(n-1)-1}$$

$$= \frac{n+1}{2n-4}$$

である． $n=5$ のとき $P(A)=1$ であるから， 上式は $n=5$ でも成り立つ．