2024年度 東京大学 前期 数学 理系

理科　第 1 問

$\mathrm{P}(x, y, 0)$ とおく.

(i) より,

$$(x, y) \fallingdotseq (0, 0) \qquad \cdots\cdots ①$$

である. 以下, ① の下で考える.

(ii) より,

$$\frac{\overrightarrow{\mathrm{OA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OP}}}{|\overrightarrow{\mathrm{OA}}||\overrightarrow{\mathrm{OP}}|} \leqq \cos \frac{2}{3}\pi \qquad \cdots\cdots ②$$

であり, $\overrightarrow{\mathrm{OA}} = (0, -1, 1)$, $\overrightarrow{\mathrm{OP}} = (x, y, 0)$ より, ② は,

$$\frac{-y}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{x^2 + y^2}} \leqq -\frac{1}{2}$$

$$\iff \sqrt{2}y \geqq \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\iff 2y^2 \geqq x^2 + y^2 \text{ かつ } y \geqq 0$$

$$\iff y^2 \geqq x^2 \text{ かつ } y \geqq 0$$

$$\iff y \geqq x \text{ かつ } y \geqq -x \qquad \cdots\cdots ③$$

(iii) より,

$$\frac{\overrightarrow{\mathrm{AO}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AP}}}{|\overrightarrow{\mathrm{AO}}||\overrightarrow{\mathrm{AP}}|} \geqq \cos \frac{\pi}{6} \qquad \cdots\cdots ④$$

である. $\overrightarrow{\mathrm{AO}} = (0, 1, -1)$, $\overrightarrow{\mathrm{AP}} = (x, y+1, -1)$ より, ④ は,

$$\frac{y + 2}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{x^2 + (y+1)^2 + (-1)^2}} \geqq \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\iff \sqrt{2}(y + 2) \geqq \sqrt{3}\sqrt{x^2 + (y+1)^2 + 1}$$

$$\iff 2(y+2)^2 \geqq 3(x^2 + y^2 + 2y + 2) \ \cdots ⑤ \text{ かつ } y + 2 \geqq 0 \ \cdots ⑥$$

ここで, ⑤ は,

$$3x^2 + y^2 - 2y \leqq 2$$

$$\therefore \quad 3x^2 + (y-1)^2 \leqq 3$$

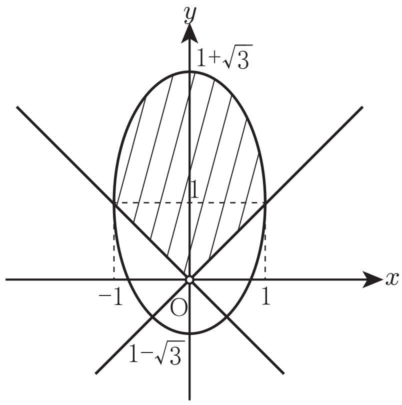
$$\therefore \quad x^2 + \frac{(y-1)^2}{3} \leqq 1 \qquad \cdots\cdots ⑤'$$

となり, ⑤$'$ は ⑥ を満たす.

以上より, (i), (ii), (iii) を満たす x, y の条件は,

① かつ ③ かつ ⑤$'$

であり, これを図示すると次図の斜線部になる. ただし, 原点 O 以外の境界を含む.


y
$1+\sqrt{3}$
1
x
-1
O
1
$1-\sqrt{3}$

2024年度 東京大学 前期 数学 理系

理科　第2問

(1)　$0 \leqq t \leqq x$ において $t-x \leqq 0$ であり，　$x \leqq t \leqq 1$ において $t-x \geqq 0$ であるから

$$f(x)=\int_0^x \frac{-(t-x)}{1+t^2}dt+\int_x^1 \frac{t-x}{1+t^2}dt$$
$$=-\int_0^x \frac{t}{1+t^2}dt+x\int_0^x \frac{1}{1+t^2}dt-\int_1^x \frac{t}{1+t^2}dt+x\int_1^x \frac{1}{1+t^2}dt$$

よって

$$f'(x)=-\frac{x}{1+x^2}+\int_0^x \frac{1}{1+t^2}dt+x\cdot\frac{1}{1+x^2}-\frac{x}{1+x^2}+\int_1^x \frac{1}{1+t^2}dt+x\cdot\frac{1}{1+x^2}$$
$$=\int_0^x \frac{1}{1+t^2}dt+\int_1^x \frac{1}{1+t^2}dt$$

$t=\tan\theta$ $\left(-\frac{\pi}{2}<\theta<\frac{\pi}{2}\right)$ とおくと，　$dt=\frac{1}{\cos^2\theta}d\theta$ であり，　$0 \leqq x \leqq 1$ より $\tan\varphi=x$ $\left(0 \leqq \varphi \leqq \frac{\pi}{4}\right)$ を満たすφ が存在する．

積分区間は，それぞれ

x	$0 \to x$
θ	$0 \to \varphi$

，

x	$1 \to x$
θ	$\pi/4 \to \varphi$

となるから

$$f'(x)=\int_0^{\varphi} \frac{\frac{1}{\cos^2\theta}}{1+\tan^2\theta}d\theta+\int_{\frac{\pi}{4}}^{\varphi} \frac{\frac{1}{\cos^2\theta}}{1+\tan^2\theta}d\theta=\Big[\theta\Big]_0^{\varphi}+\Big[\theta\Big]_{\frac{\pi}{4}}^{\varphi}$$
$$=2\varphi-\frac{\pi}{4}$$

したがって

$$f'(\tan\alpha)=0 \iff 2\alpha-\frac{\pi}{4}=0 \iff \alpha=\frac{\pi}{8}$$

(2)　(1) より

$$\tan\alpha=\tan\frac{\pi}{8}$$

$\tan^2\frac{\pi}{8}=\dfrac{1-\cos\frac{\pi}{4}}{1+\cos\frac{\pi}{4}}=\dfrac{1-\frac{1}{\sqrt{2}}}{1+\frac{1}{\sqrt{2}}}=\dfrac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}=(\sqrt{2}-1)^2$ であり，　$\tan\frac{\pi}{8}>0$ であるから

$$\tan\alpha=\sqrt{2}-1$$

(3)　$f'(x)$ の符号は $2\varphi-\frac{\pi}{4}$ の符号と一致するから，　$f(x)$ の増減は次のようになる．

x	0	$\cdots$	$\sqrt{2}-1$	$\cdots$	1
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\searrow$		$\nearrow$	

また

$$f(x)=\int\left(2\varphi-\frac{\pi}{4}\right)dx=\int\left(2\varphi-\frac{\pi}{4}\right)\frac{dx}{d\varphi}d\varphi=\int\left(2\varphi-\frac{\pi}{4}\right)\frac{1}{\cos^2\varphi}d\varphi$$
$$=\left(2\varphi-\frac{\pi}{4}\right)\tan\varphi-\int 2\tan\varphi\, d\varphi$$
$$=\left(2\varphi-\frac{\pi}{4}\right)\tan\varphi+2\log|\cos\varphi|+C \quad (C\text{ は積分定数})$$

$$f(0)=\int_0^1 \frac{t}{1+t^2}dt=\left[\frac{1}{2}\log(1+t^2)\right]_0^1=\frac{1}{2}\log 2$$

であり，$x=0$ のとき $\varphi=0$ であるから，$C=\dfrac{1}{2}\log 2$

また，$0 \leqq \varphi \leqq \dfrac{\pi}{4}$ より，$\cos\varphi>0$ であるから

$$f(x)=\left(2\varphi-\frac{\pi}{4}\right)\tan\varphi+2\log\cos\varphi+\frac{1}{2}\log 2$$

$x=\sqrt{2}-1$ のとき $\varphi=\dfrac{\pi}{8}$，$x=1$ のとき $\varphi=\dfrac{\pi}{4}$ であるから

$$f(\sqrt{2}-1)=2\log\cos\frac{\pi}{8}+\frac{1}{2}\log 2=\log\cos^2\frac{\pi}{8}+\frac{1}{2}\log 2$$

$$=\log\frac{1+\cos\frac{\pi}{4}}{2}+\frac{1}{2}\log 2=\log\frac{\sqrt{2}+1}{2}$$

$$f(1)=\frac{\pi}{4}+2\log\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{2}\log 2=\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\log 2$$

$\pi>3$, $\log 2<0.7$ より，$f(1)-f(0)=\dfrac{\pi}{4}-\log 2>\dfrac{3}{4}-0.7>0$ であるから $f(1)>f(0)$

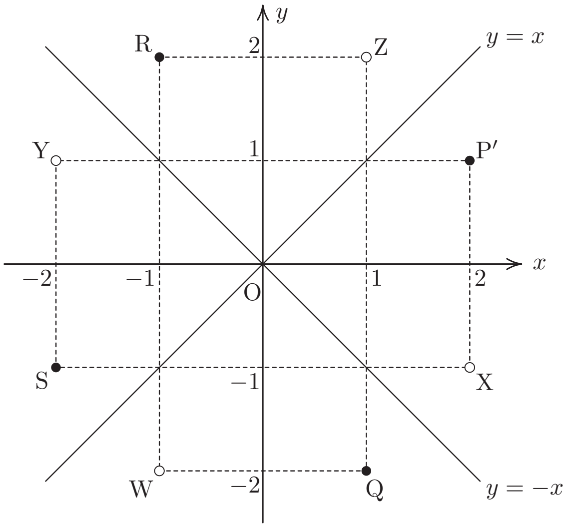
したがって，$f(x)$ の

最大値は $f(1)=\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{1}{2}\log 2$

最小値は $f(\sqrt{2}-1)=\log\dfrac{\sqrt{2}+1}{2}$

2024年度 東京大学 前期 数学 理系

理科　第 3 問



(1)　P が $(2,\ 1)$ にいる 1 秒後にいる点としてありうるのは

$$(2,\ -1),\ (-2,\ 1),\ (1,\ 2),\ (-1,\ -2) \qquad \cdots ①$$

の 4 点（順に X，Y，Z，W とおく）．更にその 1 秒後にいる点としてありうるのは

$$(2,\ 1),\ (1,\ -2),\ (-1,\ 2),\ (-2,\ -1) \qquad \cdots ②$$

の 4 点（順に P′，Q，R，S とおく）．更にその 1 秒後にいる点としてありうるのは①の 4 点．よって，奇数秒後は①のいずれか 4 点となり，偶数秒後は②のいずれか 4 点となることが帰納的にわかる．以上より点 P のとりうる点の座標は

$$(2,\ -1),\ (-2,\ 1),\ (1,\ 2),\ (-1,\ -2),\ (2,\ 1),\ (1,\ -2),\ (-1,\ 2),\ (-2,\ -1). \qquad \cdots(答)$$

(2)　n 秒後に点 P が $\mathrm{X}(2,\ -1)$，$\mathrm{Y}(-2,\ 1)$，$\mathrm{Z}(1,\ 2)$，$\mathrm{W}(-1,\ -2)$ にいる確率をそれぞれ x_n，y_n，z_n，w_n，n 秒後に点 P が $\mathrm{P}'(2,\ 1)$，$\mathrm{Q}(1,\ -2)$，$\mathrm{R}(-1,\ 2)$，$\mathrm{S}(-2,\ -1)$ にいる確率をそれぞれ p_n，q_n，r_n，s_n とおく．このとき，1 秒の推移は以下のようになる．

$$\begin{array}{llll}
\mathrm{P}'(2,\ 1) \Longrightarrow \mathrm{X}(2,\ -1), & \mathrm{P}'(2,\ 1) \Longrightarrow \mathrm{Y}(-2,\ 1), & \mathrm{P}'(2,\ 1) \longrightarrow \mathrm{Z}(1,\ 2), & \mathrm{P}'(2,\ 1) \longrightarrow \mathrm{W}(-1,\ -2) \\
\mathrm{Q}(1,\ -2) \Longrightarrow \mathrm{Z}(1,\ 2), & \mathrm{Q}(1,\ -2) \Longrightarrow \mathrm{W}(-1,\ -2), & \mathrm{Q}(1,\ -2) \longrightarrow \mathrm{Y}(-2,\ 1), & \mathrm{Q}(1,\ -2) \longrightarrow \mathrm{X}(2,\ -1) \\
\mathrm{R}(-1,\ 2) \Longrightarrow \mathrm{W}(-1,\ -2), & \mathrm{R}(-1,\ 2) \Longrightarrow \mathrm{Z}(1,\ 2), & \mathrm{R}(-1,\ 2) \longrightarrow \mathrm{X}(2,\ -1), & \mathrm{R}(-1,\ 2) \longrightarrow \mathrm{Y}(-2,\ 1) \\
\mathrm{S}(-2,\ -1) \Longrightarrow \mathrm{Y}(-2,\ 1), & \mathrm{S}(-2,\ -1) \Longrightarrow \mathrm{X}(2,\ -1), & \mathrm{S}(-2,\ -1) \longrightarrow \mathrm{W}(-1,\ -2), & \mathrm{S}(-2,\ -1) \longrightarrow \mathrm{Z}(1,\ 2)
\end{array}$$

及び，

$$\begin{array}{llll}
\mathrm{X}(2,\ -1) \Longrightarrow \mathrm{P}'(2,\ 1), & \mathrm{X}(2,\ -1) \Longrightarrow \mathrm{S}(-2,\ -1), & \mathrm{X}(2,\ -1) \longrightarrow \mathrm{R}(-1,\ 2), & \mathrm{X}(2,\ -1) \longrightarrow \mathrm{Q}(1,\ -2) \\
\mathrm{Y}(-2,\ 1) \Longrightarrow \mathrm{S}(-2,\ -1), & \mathrm{Y}(-2,\ 1) \Longrightarrow \mathrm{P}'(2,\ 1), & \mathrm{Y}(-2,\ 1) \longrightarrow \mathrm{Q}(1,\ -2), & \mathrm{Y}(-2,\ 1) \longrightarrow \mathrm{R}(-1,\ 2) \\
\mathrm{Z}(1,\ 2) \Longrightarrow \mathrm{Q}(1,\ -2), & \mathrm{Z}(1,\ 2) \Longrightarrow \mathrm{R}(-1,\ 2), & \mathrm{Z}(1,\ 2) \longrightarrow \mathrm{P}'(2,\ 1), & \mathrm{Z}(1,\ 2) \longrightarrow \mathrm{S}(-2,\ -1) \\
\mathrm{W}(-1,\ -2) \Longrightarrow \mathrm{R}(-1,\ 2), & \mathrm{W}(-1,\ -2) \Longrightarrow \mathrm{Q}(1,\ -2), & \mathrm{W}(-1,\ -2) \longrightarrow \mathrm{S}(-2,\ -1), & \mathrm{W}(-1,\ -2) \longrightarrow \mathrm{P}'(2,\ 1)
\end{array}$$

ここで，「$\Longrightarrow$」は確率 $\dfrac{1}{3}$，「$\longrightarrow$」は確率 $\dfrac{1}{6}$ を表す．よって $n=1,\ 2,\ \cdots$ に対して，n 秒後と $(n+1)$ 秒後の推移を

考えて，

$$\begin{cases} x_{n+1} = \dfrac{1}{3}p_n + \dfrac{1}{6}q_n + \dfrac{1}{6}r_n + \dfrac{1}{3}s_n \\ y_{n+1} = \dfrac{1}{3}p_n + \dfrac{1}{6}q_n + \dfrac{1}{6}r_n + \dfrac{1}{3}s_n \\ z_{n+1} = \dfrac{1}{6}p_n + \dfrac{1}{3}q_n + \dfrac{1}{3}r_n + \dfrac{1}{6}s_n \\ w_{n+1} = \dfrac{1}{6}p_n + \dfrac{1}{3}q_n + \dfrac{1}{3}r_n + \dfrac{1}{6}s_n \end{cases} , \quad \begin{cases} p_{n+1} = \dfrac{1}{3}x_n + \dfrac{1}{3}y_n + \dfrac{1}{6}z_n + \dfrac{1}{6}w_n \\ q_{n+1} = \dfrac{1}{6}x_n + \dfrac{1}{6}y_n + \dfrac{1}{3}z_n + \dfrac{1}{3}w_n \\ r_{n+1} = \dfrac{1}{6}x_n + \dfrac{1}{6}y_n + \dfrac{1}{3}z_n + \dfrac{1}{3}w_n \\ s_{n+1} = \dfrac{1}{3}x_n + \dfrac{1}{3}y_n + \dfrac{1}{6}z_n + \dfrac{1}{6}w_n \end{cases}$$

また，$x_1 = \dfrac{1}{3},\ y_1 = \dfrac{1}{3},\ z_1 = \dfrac{1}{6},\ w_1 = \dfrac{1}{6},\ p_1 = 0,\ q_1 = 0,\ r_1 = 0,\ s_1 = 0$ となる．

正の整数 n に対して，

$$x_n = y_n,\ z_n = w_n \quad \text{及び} \quad p_n = s_n,\ q_n = r_n \qquad \cdots(*)$$

となることを帰納法で示す．

(I)　$n = 1$ のとき，$(*)$ は成り立つ．

(II)　$n = k$（k は正の整数）のとき $(*)$ が成り立つとすると，漸化式より $(*)$ は $n = k+1$ のときも成り立つ．

以上より $(*)$ が示され，$p_n = s_n$ となる．　（証明終）

(3)　$(*)$ より (2) で出した漸化式を書き直すと，$n = 1,\ 2,\ \cdots$ に対して

$$\begin{cases} x_{n+1} = \dfrac{2}{3}p_n + \dfrac{1}{3}q_n \\ z_{n+1} = \dfrac{1}{3}p_n + \dfrac{2}{3}q_n \end{cases} , \quad \begin{cases} p_{n+1} = \dfrac{2}{3}x_n + \dfrac{1}{3}z_n \\ q_{n+1} = \dfrac{1}{3}x_n + \dfrac{2}{3}z_n \end{cases}$$

となるので，

$$\begin{aligned} p_{n+2} &= \frac{2}{3}x_{n+1} + \frac{1}{3}z_{n+1} \\ &= \frac{2}{3}\left(\frac{2}{3}p_n + \frac{1}{3}q_n\right) + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}p_n + \frac{2}{3}q_n\right) \end{aligned}$$

よって

$$p_{n+2} = \frac{5}{9}p_n + \frac{4}{9}q_n. \quad \cdots③$$

同様にして，

$$q_{n+2} = \frac{4}{9}p_n + \frac{5}{9}q_n. \quad \cdots④$$

(1) での考察より，n が奇数のとき $p_n = 0$ となる．

以下，n が正の偶数であるときを考える．③ − ④ より，

$$p_{n+2} - q_{n+2} = \frac{1}{9}(p_n - q_n) \quad \cdots⑤$$

となる．$p_2 = \dfrac{2}{3}x_1 + \dfrac{1}{3}z_1 = \dfrac{5}{18},\ q_2 = \dfrac{1}{3}x_1 + \dfrac{2}{3}z_1 = \dfrac{2}{9}$ なので，⑤より

$$p_n - q_n = (p_2 - q_2)\left(\frac{1}{9}\right)^{\frac{n}{2}-1} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{9}\right)^{\frac{n}{2}} = \frac{1}{2}\left\{\left(\frac{1}{3}\right)^2\right\}^{\frac{n}{2}} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^n. \quad \cdots⑥$$

また，(1) で考えたように $p_n + q_n + r_n + s_n = 1$ となるので，$(*)$ より

$$p_n + q_n = \frac{1}{2}. \quad \cdots⑦$$

よって (⑥ + ⑦) ÷ 2 より，$p_n = \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{4}\left(\dfrac{1}{3}\right)^n$.

以上より，求める確率は

$$p_n = \begin{cases} 0 & (n \text{ が奇数のとき}) \\ \dfrac{1}{4}\left\{1 + \left(\dfrac{1}{3}\right)^n\right\} & (n \text{ が偶数のとき}) \end{cases} \qquad \cdots(\text{答})$$

理科第4問

(1)　$f(x)=-\dfrac{\sqrt{2}}{4}x^2+4\sqrt{2}$ より，$f'(x)=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}x$ である．よって，放物線 $y=f(x)$ の $(t,\ f(t))$ における法線の方程式は，

$$y=\frac{\sqrt{2}}{t}(x-t)-\frac{\sqrt{2}}{4}t^2+4\sqrt{2}\quad すなわち\quad y=\frac{\sqrt{2}}{t}x-\frac{\sqrt{2}}{4}t^2+3\sqrt{2}$$

である．円 C_t の中心はこの法線と x 軸との交点であるから，C_t の中心の x 座標 $c(t)$ は，

$$c(t)=\frac{1}{4}t^3-3t \qquad \cdots\cdots(答)$$

である．半径 $r(t)$ の 2 乗は，2 点 $(t,\ f(t))$，$(c(t),\ 0)$ の距離の 2 乗に等しいので，

$$\begin{aligned}\{r(t)\}^2&=\{t-c(t)\}^2+\left(-\frac{\sqrt{2}}{4}t^2+4\sqrt{2}\right)^2\\&=t^2\left(-\frac{1}{4}t^2+4\right)^2+2\left(-\frac{1}{4}t^2+4\right)^2\\&=(t^2+2)\left(\frac{1}{16}t^4-2t^2+16\right)\\&=\frac{1}{16}t^6-\frac{15}{8}t^4+12t^2+32 \qquad \cdots\cdots(答)\end{aligned}$$

である．

(2)　円 C_t の方程式は，

$$\{x-c(t)\}^2+y^2=\{r(t)\}^2$$

である．$(3,\ a)$ がこの円周上の点であるような t の個数は，

$$\{3-c(t)\}^2+a^2=\{r(t)\}^2\quad すなわち\quad \{r(t)\}^2-\{3-c(t)\}^2=a^2 \qquad \cdots\cdots①$$

を満たす t の個数に等しい．ここで，(1) より，

$$\begin{aligned}\{r(t)\}^2-\{3-c(t)\}^2&=\frac{1}{16}t^6-\frac{15}{8}t^4+12t^2+32-\left(-\frac{1}{4}t^3+3t+3\right)^2\\&=-\frac{3}{8}t^4+\frac{3}{2}t^3+3t^2-18t+23\end{aligned}$$

であるから，$g(t)=-\dfrac{3}{8}t^4+\dfrac{3}{2}t^3+3t^2-18t+23$ とおくと，①の解の個数は，$g(t)=a^2$ の解の個数に等しく，これは $y=g(t)$ のグラフと直線 $y=a^2$ の共有点の個数に等しい．

以下，$y=g(t)$ のグラフを考える．

$$g'(t)=-\frac{3}{2}t^3+\frac{9}{2}t^2+6t-18=-\frac{3}{2}(t^3-3t^2-4t+12)=-\frac{3}{2}(t+2)(t-2)(t-3)$$

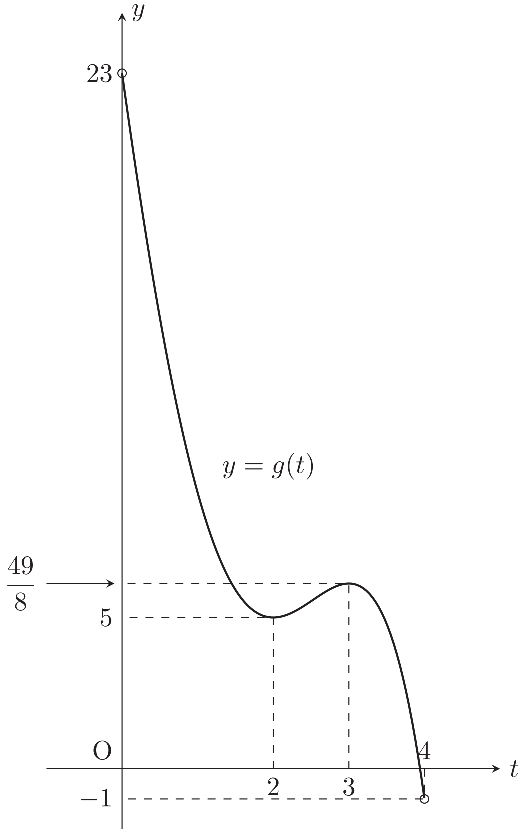
より，t の増加に伴う $g(t)$ の増減は次のようになる．

t	(0)	$\cdots$	2	$\cdots$	3	$\cdots$	(4)
$g'(t)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$g(t)$	(23)	↘	$g(2)$	↗	$g(3)$	↘	$g(4)$

ここで，

$$\begin{aligned}&g(2)=-6+12+12-36+23=5\\&g(3)=-\frac{243}{8}+\frac{81}{2}+27-54+23=\frac{81}{8}-4=\frac{49}{8}\\&g(4)=-96+96+48-72+23=-1\end{aligned}$$

である．よって，$y=g(t)$ のグラフは次のようになる．



$f(3) = \dfrac{7}{4}\sqrt{2}$ より，$0 < a^2 < \dfrac{49}{8}$ であるから，求める解の個数は，

$$\begin{cases} 0 < a^2 < 5 & \text{のとき}\quad 1\,\text{個} \\ a^2 = 5 & \text{のとき}\quad 2\,\text{個} \\ 5 < a^2 < \dfrac{49}{8} & \text{のとき}\quad 3\,\text{個} \end{cases}$$

すなわち，

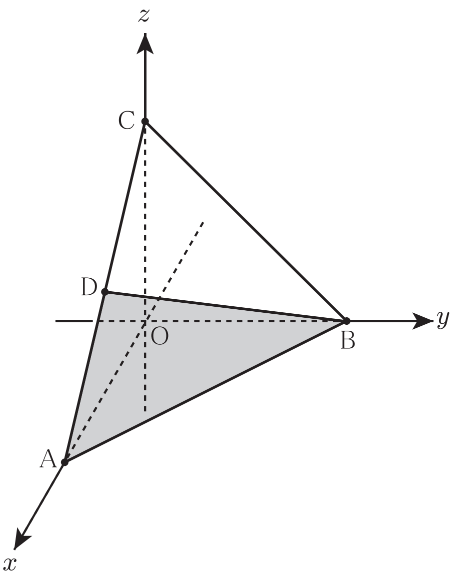
$$\begin{cases} 0 < a < \sqrt{5} & \text{のとき}\quad 1\,\text{個} \\ a = \sqrt{5} & \text{のとき}\quad 2\,\text{個} \\ \sqrt{5} < a < \dfrac{7}{4}\sqrt{2} & \text{のとき}\quad 3\,\text{個} \end{cases} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

である．

理科　第 5 問

(13:30)

$A(1,0,0)$, $B(0,1,0)$, $C(0,0,1)$, $D\left(\dfrac{1}{2},0,\dfrac{1}{2}\right)$ である．△ABD の周および内部を x 軸のまわりに 1 回転させて得られる立体を K とする．



平面 $x=t$ $(0 \leqq t \leqq 1)$ と線分 AB, AC の交点をそれぞれ P, Q とし，点 $I(t,0,0)$ から直線 PQ におろした垂線の足を H とおく．ここで，

$$P(t, 1-t, 0), \quad Q(t, 0, 1-t)$$

であり，PI = QI より H は PQ の中点であるから，

$$H\left(t, \frac{1-t}{2}, \frac{1-t}{2}\right)$$

である．また，$0 \leqq t \leqq \dfrac{1}{2}$ のとき，線分 PQ と BD の交点を R とおく．このとき，

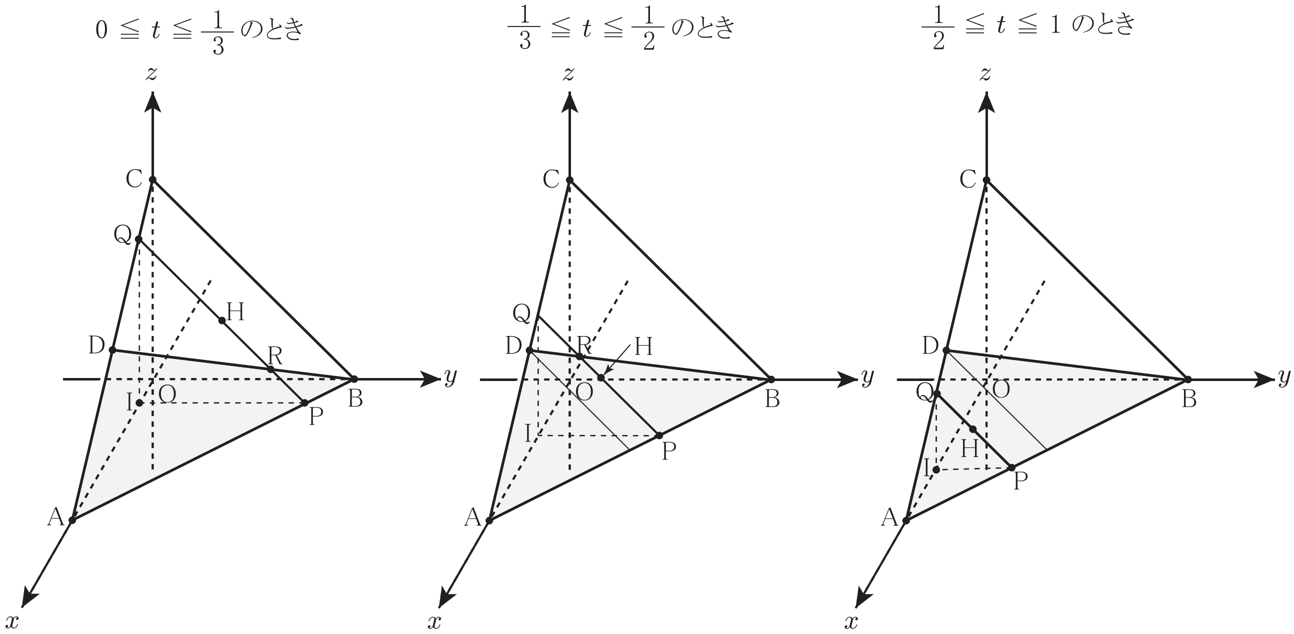
$$\begin{aligned}\overrightarrow{OR} &= \overrightarrow{OB} + \frac{t}{\frac{1}{2}}\overrightarrow{BD} \\ &= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 2t\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -1 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} t \\ 1-2t \\ t \end{pmatrix}\end{aligned}$$

であるから，$0 \leqq t \leqq \dfrac{1}{2}$ において H が線分 PR 上にない条件は，

$$1 - 2t > \frac{1-t}{2}$$

$$\therefore \quad (0 \leqq)\ t < \frac{1}{3}$$

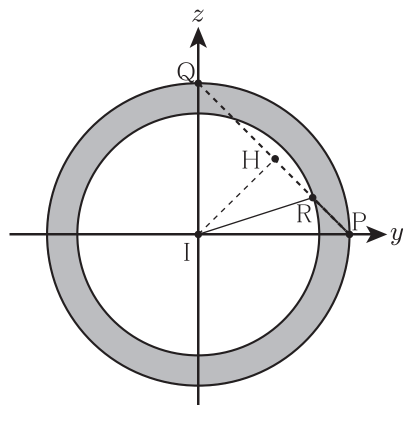
したがって, 次の図のようになる.



以下, 立体 K の平面 $x = t$ $(0 \leqq t \leqq 1)$ による断面積を $S(t)$ とおく.

(i) $0 \leqq t \leqq \dfrac{1}{3}$ のとき

H が PR 上にないから $x = t$ による断面は次のようになる.



したがって,

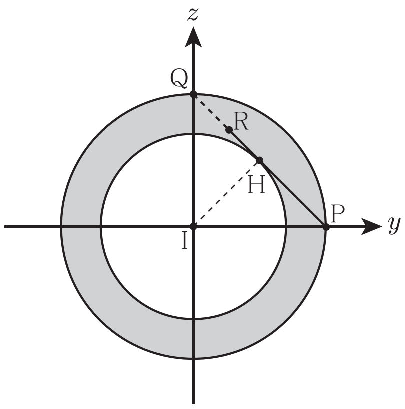
$$\begin{aligned} S(t) &= \pi \mathrm{PI}^2 - \pi \mathrm{RI}^2 \\ &= \pi\left\{(1-t)^2 - \left((1-2t)^2 + t^2\right)\right\} \\ &= \pi(2t - 4t^2) \end{aligned}$$

である.

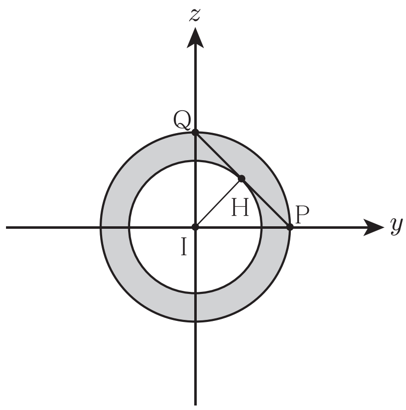
(ii) $\dfrac{1}{3} \leqq t \leqq 1$ のとき

$\dfrac{1}{3} \leqq t \leqq \dfrac{1}{2}$ のとき, H は線分 PR 上にあり, $\dfrac{1}{2} \leqq t \leqq 1$ のとき, H は線分 PQ 上にあるから, K の $x=t$ による断面は次のようになる.

$\dfrac{1}{3} \leqq t \leqq \dfrac{1}{2}$ のとき



$\dfrac{1}{2} \leqq t \leqq 1$ のとき



$\mathrm{PI} = 1-t$, $\mathrm{HI} = \dfrac{\mathrm{PI}}{\sqrt{2}} = \dfrac{1-t}{\sqrt{2}}$ であるから,

$$\begin{aligned} S(t) &= \pi \mathrm{PI}^2 - \pi \mathrm{HI}^2 \\ &= \frac{\pi}{2}(1-t)^2 \end{aligned}$$

である.

以上より, 求める体積は,

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{1}{3}} \pi(2t-4t^2)\,dt + \int_{\frac{1}{3}}^1 \frac{\pi}{2}(1-t)^2\,dt &= \pi\Big[t^2 - \frac{4}{3}t^3\Big]_0^{\frac{1}{3}} + \frac{\pi}{2}\Big[-\frac{1}{3}(1-t)^3\Big]_{\frac{1}{3}}^1 \\ &= \pi\left(\frac{1}{9} - \frac{4}{81}\right) + \frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^3 \\ &= \left(\frac{1}{9} - \frac{4}{81} + \frac{4}{81}\right)\pi \\ &= \frac{\pi}{9} \end{aligned}$$

2024年度 東京大学 前期 数学 理系

理 科 第 6 問

(1) $f(n)=n(n^2+10n+20)$ で，これが素数となるならば次のいずれかが成立する．

$n=1$ …… ①

$n=-1$ …… ②

$n^2+10n+20=1$ …… ③

$n^2+10n+20=-1$ …… ④

①のとき，$f(n)=f(1)=31$ で，これは素数である．

②のとき，$f(n)=f(-1)=-11$ で，これは素数ではない．

③を満たす整数 n は存在しない．

④のとき $n=-7,\ -3$ で，このとき $f(n)$ はそれぞれ $7,\ 3$ となり素数である．

よって，$f(n)$ が素数となるような整数 n は

$$n=-7,\ -3,\ 1$$

である．

(2) $h(x)=x^2+ax+b$ とおくと $g(n)=nh(n)$ である．

$g(n)$ が素数となるのは，次の (I)–(IV) のいずれかの場合である．

(I) $n=$ (素数) かつ $h(n)=1$

(II) $n=(-1)\times$ (素数) かつ $h(n)=-1$

(III) $n=1$ かつ $h(1)$ は素数

(IV) $n=-1$ かつ $-h(-1)$ は素数

今，(I) を満たす n が存在し，かつ (II) を満たす n が存在したと仮定してみよう．

素数 p を用いて，(I) を満たす n (の 1 つ) を $n=p$ と表す．

素数 q を用いて，(II) を満たす n (の 1 つ) を $n=-q$ と表す．

このとき，

$$1=h(p)=p^2+ap+b\,,\qquad -1=h(-q)=q^2-aq+b$$

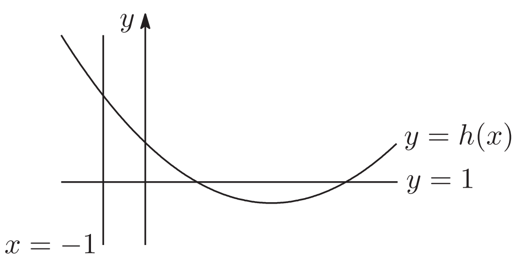
で，2 式の差をとって

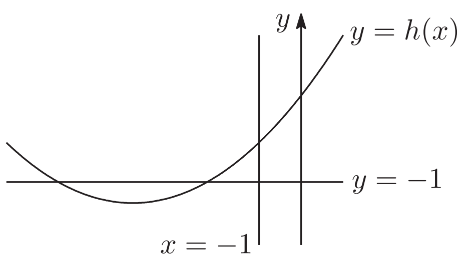
$$2=(p^2+ap+b)-(q^2-aq+b)=(p+q)(p-q+a)$$

となるが，$p,\ q$ が素数であることより $p+q\geqq 2+2=4$ だから矛盾である．

よって，「(I) を満たす n が存在し，かつ (II) を満たす n が存在する」ということは起こらない．

(I) を満たす n が 2 つ存在するか，または (II) を満たす n が 2 つ存在する場合は，$h(x)=1$ が異なる 2 つの正の整数を解にもつか，または $h(x)=-1$ が異なる 2 つの負の整数を解にもつ．このとき，いずれの場合も $h(-1)\geqq -1$，すなわち $-h(-1)\leqq 1$ となり，(IV) は起こらない．





以上より，$g(n)$ が素数となる整数 n の個数は 3 以下である．