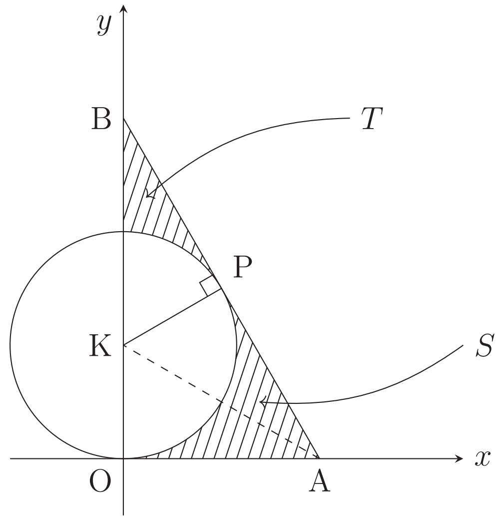
[I]



円 C の中心を K，C と l の接点を P，l と x 軸，y 軸との交点をそれぞれ A，B とし，$\angle\mathrm{OAB} = 2\theta$ とする．A と B の位置関係から $0 < 2\theta < \dfrac{\pi}{2}$，すなわち $0 < \theta < \dfrac{\pi}{4}$ である．

ここで，

$$\triangle\mathrm{OAB} = S + T + \frac{1}{2}\cdot 1^2 \cdot \pi = S + T + \frac{\pi}{2}$$

より，$S+T$ が最小となるのは，$\triangle\mathrm{OAB}$ の面積が最小となるときである．

いま，$\mathrm{OK} = 1$ より，

$$\mathrm{OA} = \frac{\mathrm{OK}}{\tan\theta} = \frac{1}{\tan\theta}$$
$$\mathrm{OB} = \mathrm{OA}\tan 2\theta = \frac{\tan 2\theta}{\tan\theta} = \frac{2}{1-\tan^2\theta}$$

であるから，

$$\triangle\mathrm{OAB} = \frac{1}{2}\mathrm{OA}\cdot\mathrm{OB} = \frac{1}{\tan\theta(1-\tan^2\theta)}$$

である．

$0 < \theta < \dfrac{\pi}{4}$ より，$\tan\theta(1-\tan^2\theta) > 0$ であるから，$\triangle\mathrm{OAB}$ が最小となるのは，$\tan\theta(1-\tan^2\theta)$ が最大となるときであり，これは $t = \tan\theta$ とおくと，$f(t) = t(1-t^2)$ が $0 < t < 1$ の範囲で最大となるときである．

$$f'(t) = 1 - 3t^2 = -3\left(t - \frac{1}{\sqrt{3}}\right)\left(t + \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

より，$f(t)$ の増減は次のようになる．

t	(0)	$\cdots$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\cdots$	(1)
$f'(t)$		$+$	0	$-$	
$f(t)$		$\nearrow$		$\searrow$	

よって，$f(t)$ は $t=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ のとき最大となるので，$S+T$ が最小となるのは，

$$t=\tan\theta=\frac{1}{\sqrt{3}}$$

すなわち，

$$\theta=\frac{\pi}{6}$$

のときである．

このとき，$\angle\mathrm{OAB}=\dfrac{\pi}{3}$ であるから，$\angle\mathrm{OBA}=\dfrac{\pi}{6}$ であり，$\mathrm{KP}\perp\mathrm{AB}$ より

$$\angle\mathrm{BKP}=\pi-\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{3}$$

である．また，$\triangle\mathrm{OAK}\equiv\triangle\mathrm{PAK}$ であるから

$$\angle\mathrm{PKA}=\angle\mathrm{OKA}=\frac{\pi}{3}$$

である．さらに，

$$\mathrm{OA}=\frac{1}{\tan\frac{\pi}{6}}=\sqrt{3}$$
$$\mathrm{OB}=\sqrt{3}\tan\frac{\pi}{3}=3$$

であり，$\mathrm{BK}=\mathrm{AK}=2$ であるから，$\triangle\mathrm{BKP}\equiv\triangle\mathrm{AKP}$ である．

よって，$\dfrac{1}{2}S=T$，すなわち $S=2T$ が成り立つので，

$$\begin{aligned}S-T&=2T-T=T\\&=\frac{1}{2}\cdot1\cdot2\cdot\sin\frac{\pi}{3}-\frac{1}{2}\cdot1^2\cdot\frac{\pi}{3}\\&=\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\pi}{6}\qquad\cdots\cdots(\text{答})\end{aligned}$$

である．

[**II**]

(1)　自然数を 3 で割った余りは，各位の数の和を 3 で割った余りに等しい．また，1 と 4 は 3 で割って 1 余る数であり，2 は 3 で割って 2 余る数である．

よって，$n+1$ 桁の自然数で 3 の倍数となるのは，

- n 桁の自然数で 3 で割って 1 余る数に，$n+1$ 桁目として 2 が追加される
- n 桁の自然数で 3 で割って 2 余る数に，$n+1$ 桁目として 1 または 4 が追加される

のいずれかのときである．よって a_{n+1} は，

$$a_{n+1} = b_n + 2c_n \qquad \cdots\cdots(答)$$

と表され，同様に考えて，b_{n+1}，c_{n+1} は，

$$b_{n+1} = c_n + 2a_n, \qquad c_{n+1} = a_n + 2b_n \qquad \cdots\cdots(答)$$

と表される．

(2)　(1) の結果より，

$$\begin{aligned} a_{n+2} &= b_{n+1} + 2c_{n+1} \\ &= (c_n + 2a_n) + 2(a_n + 2b_n) \\ &= 4a_n + 4b_n + c_n \\ &= 4(a_n + b_n + c_n) - 3c_n \end{aligned}$$

である．

ここで，$a_n + b_n + c_n$ は 3 つの数字を重複を許して n 個並べてできる n 桁の自然数の総数であるから，

$$a_n + b_n + c_n = 3^n$$

である．よって，a_{n+2} は

$$a_{n+2} = 4 \cdot 3^n - 3c_n \qquad \cdots\cdots(答)$$

と表される．

(3)　(2) と同様に b_{n+2}，c_{n+2} について考えると，

$$b_{n+2} = 4 \cdot 3^n - 3a_n, \qquad c_{n+2} = 4 \cdot 3^n - 3b_n$$

が成り立つので，a_{n+6} は，

$$\begin{aligned} a_{n+6} &= 4 \cdot 3^{n+4} - 3c_{n+4} \\ &= 4 \cdot 3^{n+4} - 3(4 \cdot 3^{n+2} - 3b_{n+2}) \\ &= 36 \cdot 3^{n+2} - 12 \cdot 3^{n+2} + 9(4 \cdot 3^n - 3a_n) \\ &= 24 \cdot 3^{n+2} + 36 \cdot 3^n - 27a_n \\ &= -27a_n + 28 \cdot 3^{n+2} \qquad \cdots\cdots(答) \end{aligned}$$

と表される．

(4) $a_{n+6}=-27a_n+28\cdot 3^{n+2}$ の両辺を 3^{n+6} で割って変形すると，

$$\frac{a_{n+6}}{3^{n+6}}=-\frac{1}{27}\cdot\frac{a_n}{3^n}+\frac{28}{81}$$

すなわち，

$$\frac{a_{n+6}}{3^{n+6}}-\frac{1}{3}=-\frac{1}{27}\left(\frac{a_n}{3^n}-\frac{1}{3}\right)$$

を得る．よって，$a_1=0$ を用い，

$$\frac{a_{6m+1}}{3^{6m+1}}-\frac{1}{3}=\left(\frac{a_1}{3^1}-\frac{1}{3}\right)\cdot\left(-\frac{1}{27}\right)^m$$

すなわち，

$$\frac{a_{6m+1}}{3^{6m+1}}=\frac{1}{3}\left\{1-\left(-\frac{1}{27}\right)^m\right\}$$

となるから，a_{6m+1} は

$$a_{6m+1}=3^{6m}-(-3)^{3m} \qquad \cdots\cdots(答)$$

と表される．

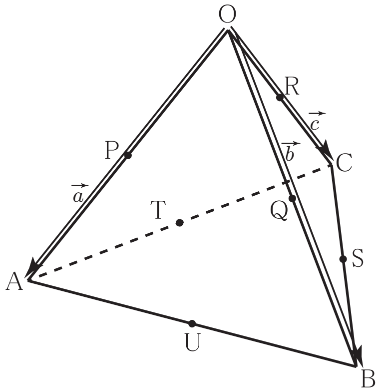
[III]

$\overrightarrow{\mathrm{OA}} = \vec{a}$, $\overrightarrow{\mathrm{OB}} = \vec{b}$, $\overrightarrow{\mathrm{OC}} = \vec{c}$ とおく．このとき，

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \frac{1}{2}\vec{a},\ \overrightarrow{\mathrm{OQ}} = \frac{1}{2}\vec{b},\ \overrightarrow{\mathrm{OR}} = \frac{1}{2}\vec{c}$$

$$\overrightarrow{\mathrm{OS}} = \frac{\vec{b}+\vec{c}}{2},\ \overrightarrow{\mathrm{OT}} = \frac{\vec{c}+\vec{a}}{2},\ \overrightarrow{\mathrm{OU}} = \frac{\vec{a}+\vec{b}}{2}$$

である．



(1) $$\frac{\overrightarrow{\mathrm{OP}}+\overrightarrow{\mathrm{OS}}}{2} = \frac{\overrightarrow{\mathrm{OQ}}+\overrightarrow{\mathrm{OT}}}{2} = \frac{\overrightarrow{\mathrm{OR}}+\overrightarrow{\mathrm{OU}}}{2} = \frac{\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}}{4}$$

であるから, PS, QT, RU の中点は一致する．

したがって, PS, QT, RU は 1 点で交わる．

(証明終わり)

(2) $\mathrm{OA}^2+\mathrm{BC}^2=\mathrm{OB}^2+\mathrm{CA}^2=\mathrm{OC}^2+\mathrm{AB}^2$ より,

$$|\vec{a}|^2+|\vec{c}-\vec{b}|^2=|\vec{b}|^2+|\vec{a}-\vec{c}|^2=|\vec{c}|^2+|\vec{b}-\vec{a}|^2$$

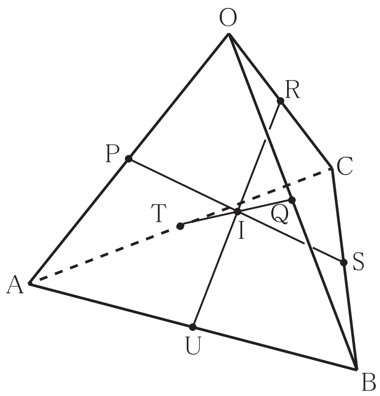
$$\therefore\quad -2\vec{b}\cdot\vec{c} = -2\vec{c}\cdot\vec{a} = -2\vec{c}\cdot\vec{b}$$

したがって,

$$\vec{b}\cdot\vec{c} = \vec{c}\cdot\vec{a} = \vec{a}\cdot\vec{b}\ (= d \text{とおく})$$

である．

次に, PS, QT, RU の中点を I とおく．



(1) より $\overrightarrow{\mathrm{OI}} = \dfrac{\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b} + \overrightarrow{c}}{4}$ であるから,

$$|\overrightarrow{\mathrm{IP}}|^2 = \left| \frac{1}{2}\overrightarrow{a} - \frac{\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b} + \overrightarrow{c}}{4} \right|^2 = \left| \frac{\overrightarrow{a} - \overrightarrow{b} - \overrightarrow{c}}{4} \right|^2$$

$$= \frac{1}{16}\left(|\overrightarrow{a}|^2 + |\overrightarrow{b}|^2 + |\overrightarrow{c}|^2 - 2d\right) \qquad \cdots\cdots ①$$

同様に,

$$|\overrightarrow{\mathrm{IQ}}|^2 = \left| \frac{-\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b} - \overrightarrow{c}}{4} \right|^2 = \frac{1}{16}\left(|\overrightarrow{a}|^2 + |\overrightarrow{b}|^2 + |\overrightarrow{c}|^2 - 2d\right)$$

$$|\overrightarrow{\mathrm{IR}}|^2 = \left| \frac{-\overrightarrow{a} - \overrightarrow{b} + \overrightarrow{c}}{4} \right|^2 = \frac{1}{16}\left(|\overrightarrow{a}|^2 + |\overrightarrow{b}|^2 + |\overrightarrow{c}|^2 - 2d\right)$$

であるから, $|\overrightarrow{\mathrm{IP}}| = |\overrightarrow{\mathrm{IQ}}| = |\overrightarrow{\mathrm{IR}}|$ である.

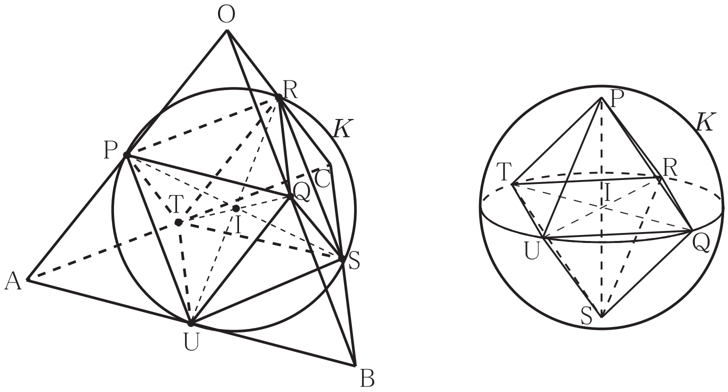
また, I は PS, QT, RU の中点であるから,

$$|\overrightarrow{\mathrm{IP}}| = |\overrightarrow{\mathrm{IS}}|, \quad |\overrightarrow{\mathrm{IQ}}| = |\overrightarrow{\mathrm{IT}}|, \quad |\overrightarrow{\mathrm{IR}}| = |\overrightarrow{\mathrm{IU}}|$$

であり, I から 6 点 P, Q, R, S, T, U までの距離は等しいので, この 6 点は同一球面上にある.

(証明終わり)

(3)　(2) より 6 点 P, Q, R, S, T, U は I を中心とする球面 (これを K とする) 上にあり, PS, QT, RU はいずれも K の直径である.



4 点 Q, R, T, U は K の大円上にあり, $\overrightarrow{\mathrm{QU}}=\overrightarrow{\mathrm{RT}}=\dfrac{1}{2}\vec{a}$ であるから, 四角形 QRTU は長方形である.

$$\mathrm{QU}=\frac{1}{2}\mathrm{OA}=\frac{1}{2}a,\quad \mathrm{QR}=\frac{1}{2}\mathrm{BC}=\frac{1}{2}k$$

であるから, 長方形の面積は,

$$\mathrm{QU}\cdot\mathrm{QR}=\frac{1}{4}ak$$

である.

また,

$$\begin{aligned}\mathrm{PS}=\mathrm{QT}&=\sqrt{\mathrm{QU}^2+\mathrm{QR}^2}\\&=\frac{1}{2}\sqrt{a^2+k^2}\end{aligned}$$

である.

与えられた条件より, PS⊥OA, PS⊥BC であるから,

$$\mathrm{PS}\perp(\text{長方形}\,\mathrm{QRTU})$$

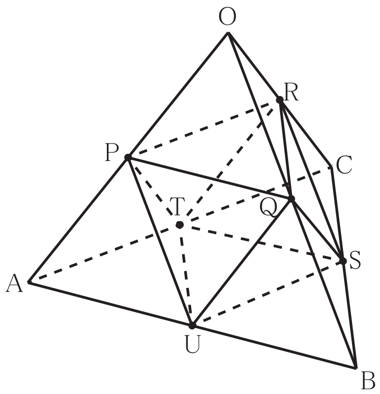
であり,

$$\begin{aligned}V&=\frac{1}{3}\cdot(\text{長方形}\,\mathrm{QRTU}\,\text{の面積})\cdot\mathrm{PS}\\&=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{4}ak\cdot\frac{1}{2}\sqrt{k^2+a^2}\\&=\frac{1}{24}ak\sqrt{k^2+a^2}\qquad\cdots\cdots\text{(答)}\end{aligned}$$

と表せる.

[別解]

四面体 OABC の体積を W とおく. 4 つの四面体 OPQR, APTU, BQSU, CRTS はいずれも四面体 OABC と相似で, 相似比は $\dfrac{1}{2}$ であるので, それぞれの体積はどれも $\dfrac{1}{8}W$ である.



したがって,

$$V = W - \frac{1}{8}W \times 4 = \frac{1}{2}W$$

である.

次に, $\overrightarrow{\mathrm{PS}} \perp \overrightarrow{\mathrm{OA}}$ より, $\overrightarrow{\mathrm{PS}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OA}} = 0$ であるから,

$$\frac{\vec{b} + \vec{c} - \vec{a}}{2} \cdot \vec{a} = 0$$

$$\vec{b} \cdot \vec{a} + \vec{c} \cdot \vec{a} - |\vec{a}|^2 = 0$$

$$2d - a^2 = 0 \qquad (\because |\vec{a}| = a)$$

$$\therefore \quad d = \frac{a^2}{2} \qquad \cdots\cdots ②$$

また, $\overrightarrow{\mathrm{PS}} \perp \overrightarrow{\mathrm{BC}}$ より, $\overrightarrow{\mathrm{PS}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{BC}} = 0$ であるから,

$$\frac{\vec{b} + \vec{c} - \vec{a}}{2} \cdot (\vec{c} - \vec{b}) = 0$$

$$|\vec{c}|^2 - |\vec{b}|^2 - \vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{a} \cdot \vec{b} = 0$$

$$\therefore \quad |\vec{b}| = |\vec{c}| \qquad \cdots\cdots ③$$

また, $\mathrm{BC} = k$ より,

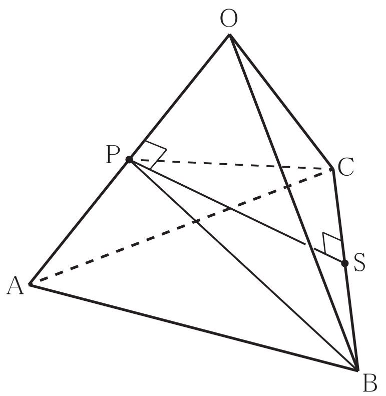
$$|\vec{c} - \vec{b}|^2 = k^2$$

$$|\vec{b}|^2 - 2\vec{b} \cdot \vec{c} + |\vec{c}|^2 = k^2$$

であり, ②, ③ より,

$$|\vec{b}|^2 = |\vec{c}|^2 = \frac{k^2 + a^2}{2} \qquad \cdots\cdots ④$$

を得る.



よって,

$$
\begin{aligned}
|\overrightarrow{\mathrm{PS}}|^2 &= \left|\frac{\vec{b}+\vec{c}-\vec{a}}{2}\right|^2 \\
&= \frac{1}{4}(|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2+|\vec{c}|^2+2d) \\
&= \frac{1}{4}\left(a^2+2\cdot\frac{k^2+a^2}{2}-2\cdot\frac{a^2}{2}\right) \quad (\because ②, ④) \\
&= \frac{1}{4}(k^2+a^2)
\end{aligned}
$$

より, $|\overrightarrow{\mathrm{PS}}| = \dfrac{1}{2}\sqrt{k^2+a^2}$ である.

次に, $\overrightarrow{\mathrm{BC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}} = (\vec{c}-\vec{b})\cdot\vec{a} = 0$ であるから, $\overrightarrow{\mathrm{BC}}\perp\overrightarrow{\mathrm{OA}}$, これと $\overrightarrow{\mathrm{PS}}\perp\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ より,

$$(\text{平面 PBC}) \perp \overrightarrow{\mathrm{OA}}$$

であるから,

$$
\begin{aligned}
W &= \frac{1}{3}\cdot\triangle\mathrm{PBC}\cdot|\overrightarrow{\mathrm{OA}}| \\
&= \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}k\cdot\frac{1}{2}\sqrt{k^2+a^2}\cdot a \\
&= \frac{1}{12}ak\sqrt{k^2+a^2}
\end{aligned}
$$

であり,

$$V = \frac{1}{2}W = \frac{1}{24}ak\sqrt{k^2+a^2} \qquad \cdots\cdots (\text{答})$$

と表される.

(4)　$k=1$ のとき,

$$V=\frac{1}{24}a\sqrt{1+a^2}$$

である. ここで, a は $a>0$ を満たす任意の値をとることができる ($\to$ (注)) から, V はいくらでも大きい値をとれるので,

V の最大値は存在しない　　…… (答)

(注) $k=1$ のとき, ②, ③, ④ より,

$$|\overrightarrow{a}|=a,\ |\overrightarrow{b}|=|\overrightarrow{c}|=\sqrt{\frac{1+a^2}{2}}$$

$$\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}=\overrightarrow{b}\cdot\overrightarrow{c}=\overrightarrow{c}\cdot\overrightarrow{a}=\frac{a^2}{2}$$

である. 任意の正の数 a に対し, これらを満たす $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$, $\overrightarrow{c}$ は存在するから, a は任意の正の値をとることができる.

[IV]

(1)　3 回試合を行い W が連敗するのは，試合に勝つチームを 1 試合目から順に並べたときに KKW，WKK，KKK となる場合である．したがって，

$$p_3 = 1 - 3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{5}{8} \qquad \cdots\cdots(答)$$

である．

(2)　$n+2$ 回試合を行い W が連敗しないのは，次の 2 つの場合に分けることができる．

- 1 試合目に W が勝つ場合，2 試合目以降の残り $n+1$ 試合の中で W が連敗しない
- 1 試合目に K が勝つ場合，2 試合目は W が勝ち，3 試合目以降の残り n 試合の中で W が連敗しない

したがって，

$$p_{n+2} = \frac{1}{2} \cdot p_{n+1} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot p_n$$

すなわち

$$p_{n+2} = \frac{1}{2} p_{n+1} + \frac{1}{4} p_n \qquad \cdots\cdots(答)$$

と表される．

(3)

$$p_{n+2} - \beta p_{n+1} = \alpha(p_{n+1} - \beta p_n) \qquad \cdots\cdots①$$
$$p_{n+2} - \alpha p_{n+1} = \beta(p_{n+1} - \alpha p_n) \qquad \cdots\cdots②$$

を変形すると，どちらも

$$p_{n+2} = (\alpha + \beta) p_{n+1} - \alpha\beta p_n$$

となるので，求める α，β は

$$\alpha + \beta = \frac{1}{2} \quad かつ \quad \alpha\beta = -\frac{1}{4}$$

を満たす．よって，解と係数の関係より α，β は t の 2 次方程式 $4t^2 - 2t - 1 = 0$ の 2 解であり，$\alpha < \beta$ に注意して，

$$(\alpha,\ \beta) = \left(\frac{1-\sqrt{5}}{4},\ \frac{1+\sqrt{5}}{4}\right) \qquad \cdots\cdots(答)$$

である．

(4)　①，②から

$$p_{n+1}-\beta p_n=(p_3-\beta p_2)\alpha^{n-2} \qquad \cdots\cdots ③$$
$$p_{n+1}-\alpha p_n=(p_3-\alpha p_2)\beta^{n-2} \qquad \cdots\cdots ④$$

であり，④ − ③ より

$$(\beta-\alpha)p_n=(p_3-\alpha p_2)\beta^{n-2}-(p_3-\beta p_2)\alpha^{n-2} \qquad \cdots\cdots ⑤$$

を得る．ここで，2 回試合を行い W が連敗するのは，K が 2 連続で勝つ場合のみなので，$p_2=1-\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{3}{4}$ であることと，(1), (3) の結果を用いると

$$\beta-\alpha=\frac{1+\sqrt{5}}{4}-\frac{1-\sqrt{5}}{4}=\frac{\sqrt{5}}{2}$$
$$p_3-\alpha p_2=\frac{5}{8}-\frac{1-\sqrt{5}}{4}\cdot\frac{3}{4}=\frac{7+3\sqrt{5}}{16}$$
$$p_3-\beta p_2=\frac{5}{8}-\frac{1+\sqrt{5}}{4}\cdot\frac{3}{4}=\frac{7-3\sqrt{5}}{16}$$

であるから，⑤に代入して

$$\frac{\sqrt{5}}{2}p_n=\frac{7+3\sqrt{5}}{16}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{4}\right)^{n-2}-\frac{7-3\sqrt{5}}{16}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{4}\right)^{n-2}$$
$$\therefore\ p_n=\frac{1}{\sqrt{5}}\left\{\frac{7+3\sqrt{5}}{8}\cdot\left(\frac{1+\sqrt{5}}{4}\right)^{n-2}-\frac{7-3\sqrt{5}}{8}\cdot\left(\frac{1-\sqrt{5}}{4}\right)^{n-2}\right\}$$

$\cdots\cdots$(答)

である．

(注) $p_1=1$ とすれば，(2) の漸化式は $n\geqq 1$ に対し成り立つので①，②から

$$p_{n+1}-\beta p_n=(p_2-\beta p_1)\alpha^{n-1}$$
$$p_{n+1}-\alpha p_n=(p_2-\alpha p_1)\beta^{n-1}$$

と変形でき，ここから p_n を求めてもよい．その場合は，

$$p_n=\frac{1}{\sqrt{5}}\left\{\frac{2+\sqrt{5}}{2}\cdot\left(\frac{1+\sqrt{5}}{4}\right)^{n-1}-\frac{2-\sqrt{5}}{2}\cdot\left(\frac{1-\sqrt{5}}{4}\right)^{n-1}\right\}$$

となる．

[V]

(1)　2 倍角の公式を用いて変形すると，

$$\begin{aligned} y &= -\cos t - \frac{1}{2}(2\cos^2 t - 1) - \frac{1}{2} \\ &= -\cos^2 t - \cos t \\ &= -\left(\cos t + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4} \end{aligned}$$

となる．t が $0 \leqq t \leqq \pi$ を動くとき，$\cos t$ の値域は $-1 \leqq \cos t \leqq 1$ であるから，

$$\text{最大値} = \frac{1}{4} \qquad \text{最小値} = -2 \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

である．

(2)　y を t で微分すると，

$$\frac{dy}{dt} = \sin t + \sin 2t = \sin t(1 + 2\cos t)$$

となる．“$0 \leqq t \leqq \pi$ において $\sin t \geqq 0$” に注意すると，$\dfrac{dy}{dt} < 0$ となる t の範囲は，

$$1 + 2\cos t < 0 \quad \text{かつ} \quad \sin t \fallingdotseq 0$$

すなわち，

$$\cos t < -\frac{1}{2} \quad \text{かつ} \quad \sin t \fallingdotseq 0$$

より，

$$\frac{2}{3}\pi < t < \pi \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

である．

x を t で微分すると，

$$\frac{dx}{dt} = \cos t + \cos 2t = 2\cos^2 t + \cos t - 1 = (2\cos t - 1)(\cos t + 1)$$

となる．

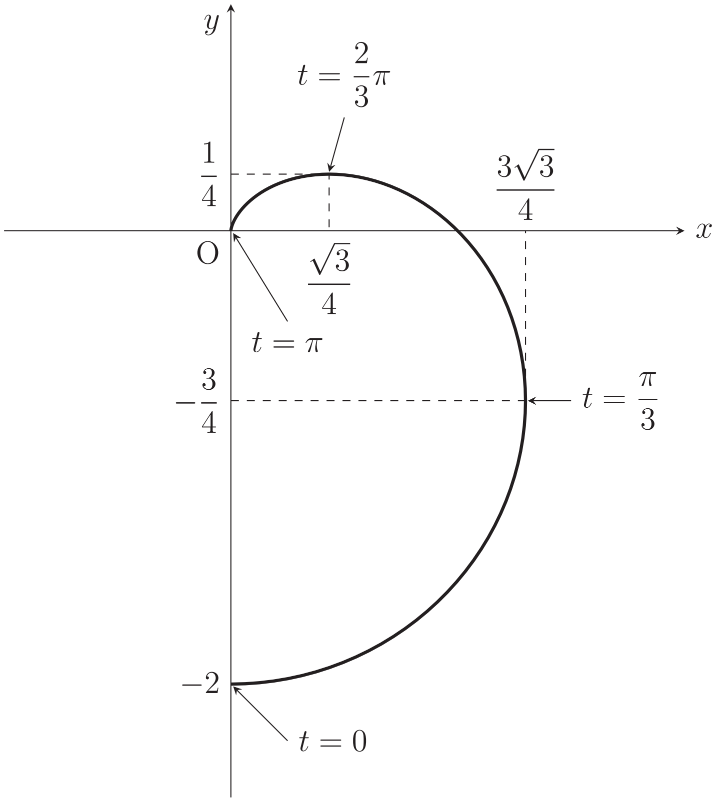
よって，x，y の t の増加に伴う増減は次のようになる．

t	0	$\cdots$	$\frac{\pi}{3}$	$\cdots$	$\frac{2}{3}\pi$	$\cdots$	π
$\frac{dx}{dt}$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	$-$
$\frac{dy}{dt}$	$+$	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$
x	0	$\nearrow$	$\frac{3\sqrt{3}}{4}$	$\searrow$	$\frac{\sqrt{3}}{4}$	$\searrow$	0
y	-2	$\nearrow$	$-\frac{3}{4}$	$\nearrow$	$\frac{1}{4}$	$\searrow$	0

したがって，点 $(x,\ y)$ の t の増加に伴う移動は次のようになる

t	0	$\cdots$	$\dfrac{\pi}{3}$	$\cdots$	$\dfrac{2}{3}\pi$	$\cdots$	π
$(x,\ y)$	$(0,\ -2)$	$\nearrow$	$\left(\dfrac{3\sqrt{3}}{4},\ -\dfrac{3}{4}\right)$	$\nwarrow$	$\left(\dfrac{\sqrt{3}}{4},\ \dfrac{1}{4}\right)$	$\swarrow$	$(0,\ 0)$

以上より，C の概形は次のようになる



(3) $0 \leqq t \leqq \dfrac{2}{3}\pi$ における x を x_1，$\dfrac{2}{3}\pi \leqq t \leqq \pi$ における x を x_2 とすると，(2) の図より，

$$
\begin{aligned}
V &= \pi \int_{-2}^{\frac{1}{4}} {x_1}^2\, dy - \pi \int_{0}^{\frac{1}{4}} {x_2}^2\, dy \\
&= \pi \int_{0}^{\frac{2}{3}\pi} \left(\sin t + \frac{1}{2}\sin 2t\right)^2 (\sin t + \sin 2t)\, dt \\
&\qquad\qquad - \pi \int_{\pi}^{\frac{2}{3}\pi} \left(\sin t + \frac{1}{2}\sin 2t\right)^2 (\sin t + \sin 2t)\, dt \\
&= \pi \int_{0}^{\pi} \left(\sin t + \frac{1}{2}\sin 2t\right)^2 (\sin t + \sin 2t)\, dt
\end{aligned}
$$

で与えられる．ここで，

$$
\begin{aligned}
&\left(\sin t+\frac{1}{2}\sin 2t\right)^2(\sin t+\sin 2t)\\
&=(\sin t+\sin t\cos t)^2(\sin t+2\sin t\cos t)\\
&=\sin^2 t(1+\cos t)^2(1+2\cos t)\cdot\sin t\\
&=(1-\cos^2 t)(1+\cos t)^2(1+2\cos t)\cdot\sin t
\end{aligned}
$$

と変形できるので，$u=\cos t$ とおくと，

$$
\begin{aligned}
V&=\pi\int_1^{-1}(1-u^2)(1+u)^2(1+2u)\,(-du)\\
&=\pi\int_{-1}^{1}(1-u^2)(1+u)^2(1+2u)\,du\\
&=2\pi\int_0^1(1+4u^2-5u^4)\,du\\
&=2\pi\left[u+\frac{4}{3}u^3-u^5\right]_0^1\\
&=\frac{8}{3}\pi \qquad\cdots\cdots(\text{答})
\end{aligned}
$$

である．