2024年度 早稲田大学 商学部 数学

$\boxed{1}$

(1) 与式より

$$\left|\frac{44\cdot 46n}{1-46n}+44\right|<\frac{1}{2025} \Leftrightarrow \left|\frac{46n}{1-46n}+1\right|<\frac{1}{44\cdot 2025} \Leftrightarrow \left|\frac{1}{1-46n}\right|<\frac{1}{44\cdot 2025}$$

であり, ここで n が正の整数であることより $1-46n<0$ であるから

$$46n-1>44\cdot 2025 \Leftrightarrow n>\frac{89101}{46}=1936.9\cdots$$

となる. したがって求める最小値は

$$n=\mathbf{1937} \qquad \cdots\cdots\text{(答)}$$

である.

(2)

$${a_{i+1}}^3<27{a_i}^4\ (i=1,2,3,\cdots\cdots,n-1)\cdots①,\ \sum_{i=1}^{n-1}\frac{a_i}{a_{i+1}}=\frac{a_1}{a_2}+\frac{a_2}{a_3}+\frac{a_3}{a_4}+\cdots\cdots+\frac{a_{n-1}}{a_n}<1\cdots②$$

とする (n は 2 以上の整数).

ここで, $a_1=1, a_2, a_3, \cdots\cdots, a_n$ が正の整数であることと ② より $a_2>1$ であり, ① より ${a_2}^3<27{a_1}^4=27$ であるから $a_2=2$ となる.

したがって ② より

$$\frac{2}{a_3}+\frac{a_3}{a_4}+\cdots\cdots+\frac{a_{n-1}}{a_n}<\frac{1}{2}$$

となるから $a_3>4$ であり, ① より ${a_3}^3<27{a_2}^4=432$ であるから $a_3=5,6,7$ となる. ここで

(i) $a_3=5$ のとき

② より

$$\frac{5}{a_4}+\cdots\cdots+\frac{a_{n-1}}{a_n}<\frac{1}{10}$$

となるから $a_4>50\cdots③$ であり, ① より ${a_4}^3<27{a_3}^4=27\cdot 5^4\cdots④$ であるが, $50^3=125000>16875=27\cdot 5^4$ なので ③ かつ ④ をみたす正の整数 a_4 は存在しない.

(ii) $a_3=6$ のとき

②より

$$\frac{6}{a_4}+\cdots\cdots+\frac{a_{n-1}}{a_n}<\frac{1}{6}$$

となるから $a_4>36\cdots$⑤であり, ①より ${a_4}^3<27{a_3}^4=27\cdot 6^4=27\cdot 36\cdot 36\cdots$⑥であるが, $36^3>27\cdot 36\cdot 36$ なので⑤かつ⑥をみたす正の整数 a_4 は存在しない.

(iii) $a_3=7$ のとき

②より

$$\frac{7}{a_4}+\cdots\cdots+\frac{a_{n-1}}{a_n}<\frac{3}{14}$$

となるから

$$\frac{7}{a_4}<\frac{3}{14} \iff a_4>\frac{98}{3}=32.6\cdots \qquad \cdots ⑦$$

であり, ①より ${a_4}^3<27{a_3}^4=27\cdot 7^4=64827\cdots$⑧であり, $40^3=64000,\ 41^3=68921$ であることに注意すると⑦かつ⑧をみたす正の整数 a_4 は

$$a_4=33,34,35,36,37,38,39,40$$

となる. したがって①より ${a_5}^3<27{a_4}^4\leqq 27\cdot 40^4=69120000$ であり, $410^3=68921000, 411^3=69426531$ に注意すると a_5 が正の整数であることとあわせて $a_5\leqq 410$ となるが, このとき

$$\frac{a_1}{a_2}+\frac{a_2}{a_3}+\frac{a_3}{a_4}+\frac{a_4}{a_5}\geqq\frac{1}{2}+\frac{2}{7}+\frac{7}{40}+\frac{a_4}{a_5}\geqq\frac{1}{2}+\frac{2}{7}+\frac{7}{40}+\frac{33}{410}=\frac{11953}{11480}>1$$

となり, ②をみたさない. 以上により a_n の最大値は

$n=2$ のとき 2, $n=3$ のとき 7, $n=4$ のとき 40, $n\geqq 5$ のとき存在しない.

このうち最大値は **40** である. ……(答)

(3) $b_n=\log_C a_n$ ($C>0,\ C\neq 1,\ a_n>0$) とおくと, $b_1=\log_C a_1=\log_C C=1$ であり, また

$${a_n}^{n+1}{a_{n+1}}^n=C^{-(2n+1)} \iff \log_C {a_n}^{n+1}{a_{n+1}}^n=\log_C C^{-(2n+1)}$$

$$\iff (n+1)\log_C a_n+n\log_C a_{n+1}=-(2n+1) \iff \frac{b_n}{n}+\frac{b_{n+1}}{n+1}=-\frac{2n+1}{n(n+1)}$$

$$\iff \frac{b_{n+1}}{n+1}+\frac{1}{n+1}=-\left(\frac{b_n}{n}+\frac{1}{n}\right) \iff \frac{b_n}{n}+\frac{1}{n}=(b_1+1)\cdot(-1)^{n-1}=2(-1)^{n-1}$$

$$\iff b_n=2n(-1)^{n-1}-1$$

となるから, 求めるものは

$$a_n = \boldsymbol{C^{2n(-1)^{n-1}-1}} \qquad \cdots\cdots\text{（答）}$$

である.

(4) $\mathrm{A}(\alpha, \alpha^2)$, $\mathrm{B}(\beta, \beta^2)$, $\alpha < \beta$ とおく. $y = x^2$ 上の 2 点 A, B における接線の方程式はそれぞれ

$$y = 2\alpha x - \alpha^2, \quad y = 2\beta x - \beta^2$$

であり, これらの交点が $\mathrm{P}(s, t)$ であるから

$$s = \frac{\alpha+\beta}{2}, \quad t = \alpha\beta \quad \cdots \quad ⑨$$

となる. このとき $\alpha < \beta$ より s, t は $s^2 - t = \dfrac{1}{4}(\beta-\alpha)^2 > 0$ すなわち $s^2 - t > 0$ をみたすことが必要である.

次に線分 PA, PB と $y = x^2$ で囲まれた図形の面積について,

$$\int_\alpha^s (x-\alpha)^2 dx + \int_s^\beta (x-\beta)^2 dx = \left[\frac{1}{3}(x-\alpha)^3\right]_\alpha^s + \left[\frac{1}{3}(x-\beta)^3\right]_s^\beta = \frac{1}{12}(\beta-\alpha)^3 = \frac{144}{125}$$

となるから, $(\beta-\alpha)^3 = \dfrac{12^3}{5^3}$ であり, $\beta - \alpha$ が実数であることから $\beta - \alpha = \dfrac{12}{5}$ となる. したがって $\alpha < \beta$ のもとで ⑨ とあわせて求める方程式は

$$\beta - \alpha = \frac{12}{5} \iff (\alpha-\beta)^2 = \frac{144}{25} \iff (\alpha+\beta)^2 - 4\alpha\beta = \frac{144}{25} \iff 4s^2 - 4t = \frac{144}{25}$$

$$\iff \boldsymbol{25(s^2 - t) = 36} \qquad \cdots\cdots\text{(答)}$$

である.

$\boxed{2}$

半径が1の円に内接する四角形 ABCD のうち，とくに四角形の内部に円の中心がある場合を考える．

四角形 ABCD の頂点 A, B, C, D はこの順に反時計回りであるとし，$\angle\mathrm{AOB}=\alpha$, $\angle\mathrm{BOC}=\beta$, $\angle\mathrm{COD}=\gamma$, $\angle\mathrm{DOA}=\delta$ とおく．ただし，$\alpha+\beta \leqq \gamma+\delta$ として一般性を失わない．

四角形 ABCD の面積を S とすると，

$$
\begin{aligned}
S &= \frac{1}{2}(\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma+\sin\delta) \\
&= \sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}+\sin\frac{\gamma+\delta}{2}\cos\frac{\gamma-\delta}{2}
\end{aligned}
$$

であるが，

$$\alpha+\beta+\gamma+\delta=2\pi \text{ より，}\quad \frac{\gamma+\delta}{2}=\pi-\frac{\alpha+\beta}{2}$$

であるから，

$$\sin\frac{\gamma+\delta}{2}=\sin\left(\pi-\frac{\alpha+\beta}{2}\right)=\sin\frac{\alpha+\beta}{2}$$

であることに注意すると，

$$S=\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\left(\cos\frac{\alpha-\beta}{2}+\cos\frac{\gamma-\delta}{2}\right)$$

と表せる．

(1)　4枚のカードを取りだすことによってできる四角形 R に関して，上述の α, β, γ, δ はすべて $\dfrac{\pi}{12}$ の整数倍に限られる．

以下，$\alpha+\beta$ の値によって場合を分ける．

(i)　$\alpha+\beta=\pi$ の場合．

$S=\cos\dfrac{\alpha-\beta}{2}+\cos\dfrac{\gamma-\delta}{2}$ である．ここで，$\cos\dfrac{\alpha-\beta}{2}$ は $|\alpha-\beta|$ の減少関数である．これは $\cos\dfrac{\gamma-\delta}{2}$ についても同様である．

$|\alpha-\beta|$, $|\gamma-\delta|$ の最小値は0であり，$\alpha-\beta=\gamma-\delta=0$ のとき S は最大で，このとき $S=2$ である．

$\alpha-\beta$ も $\dfrac{\pi}{12}$ の整数倍であるから，ある整数 k を用いて $\alpha-\beta=\dfrac{k\pi}{12}$ とおける．これと $\alpha+\beta=\pi$ を連立して解くと，

$$\alpha=\frac{\pi}{2}+\frac{k\pi}{24},\quad \beta=\frac{\pi}{2}-\frac{k\pi}{24}$$

となるが，α, β がともに $\dfrac{\pi}{12}$ の整数倍となるための条件は k が偶数となることである．

したがって，$|\alpha-\beta|$ の 2 番目に小さい値は $\dfrac{2\pi}{12}$ である．

よって，2 番目に大きな S の値は，$|\alpha-\beta|=\dfrac{2\pi}{12}$，$\gamma-\delta=0$ のときの

$$S=\cos\frac{\pi}{12}+\cos 0=1+\cos\frac{\pi}{12}$$

である．

また，$|\alpha-\beta|=|\gamma-\delta|=\dfrac{2\pi}{12}$ のとき，$S=2\cos\dfrac{\pi}{12}$ である．

一方，$|\alpha-\beta|$ の 3 番目に小さい値は $\dfrac{4\pi}{12}$ である．$|\alpha-\beta|=\dfrac{4\pi}{12}$，$|\gamma-\delta|=0$ のとき，$S=\cos\dfrac{\pi}{6}+1=1+\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ である．

$$\left(2\cos\frac{\pi}{12}\right)^2-\left(1+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2=4\cdot\frac{1+\cos\frac{\pi}{6}}{2}-\left(1+\sqrt{3}+\frac{3}{4}\right)=\frac{1}{4}>0$$

より，$2\cos\dfrac{\pi}{12}>1+\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ であるから，この場合の S の値を大きい順に 3 つ並べると，

$$2>1+\cos\frac{\pi}{12}>2\cos\frac{\pi}{12}$$

となる．

(ii)　$\alpha+\beta=\dfrac{11\pi}{12}$ の場合．

(i) と同様に考えると，$|\alpha-\beta|$，$|\gamma-\delta|$ のとり得る値は $\dfrac{\pi}{12}$ の奇数倍に限る．

よって，S が最大となるのは $|\alpha-\beta|=|\gamma-\delta|=\dfrac{\pi}{12}$ のときであり，このとき

$$S=\sin\frac{11\pi}{24}\cdot 2\cos\frac{\pi}{24}=2\cos^2\frac{\pi}{24}=1+\cos\frac{\pi}{12}$$

である．

S が 2 番目に大きくなるのは $|\alpha-\beta|$，$|\gamma-\delta|$ の一方が $\dfrac{\pi}{12}$，他方が $\dfrac{3\pi}{12}$ のときであり，このとき

$$\begin{aligned}S&=\sin\frac{11\pi}{24}\left(\cos\frac{\pi}{24}+\cos\frac{3\pi}{24}\right)\\&=\cos^2\frac{\pi}{24}+\cos\frac{\pi}{24}\cos\frac{3\pi}{24}\\&=\frac{1}{2}\left(1+\cos\frac{\pi}{12}+\cos\frac{4\pi}{24}+\cos\frac{2\pi}{24}\right)\\&=\frac{2+\sqrt{3}}{4}+\cos\frac{\pi}{12}\end{aligned}$$

よって，この場合の S が大きい順に 2 つ並べると，

$$1+\cos\frac{\pi}{12} > \frac{2+\sqrt{3}}{4}+\cos\frac{\pi}{12}$$

となる．ただし，

$$\cos^2\frac{\pi}{12}=\frac{1}{2}\left(1+\cos\frac{\pi}{6}\right)=\frac{2+\sqrt{3}}{4} \qquad \cdots\cdots ①$$

であるから，

$$\begin{aligned}\cos^2\frac{\pi}{12}-\left(\frac{2+\sqrt{3}}{4}\right)^2 &= \frac{2+\sqrt{3}}{4}\left(1-\frac{2+\sqrt{3}}{4}\right)\\ &= \frac{2+\sqrt{3}}{4}\cdot\frac{2-\sqrt{3}}{2}\\ &> 0\end{aligned}$$

よって，$\cos\frac{\pi}{12} > \frac{2+\sqrt{3}}{4}$ であるから，$2\cos\frac{\pi}{12} > \frac{2+\sqrt{3}}{4}+\cos\frac{\pi}{12}$ が成り立つ．

(iii)　$\alpha+\beta=\frac{10\pi}{12}$ の場合．

S が最大となるのは $\alpha-\beta=\gamma-\delta=0$ のときであり，このとき $S=2\sin\frac{5\pi}{12}=2\cos\frac{\pi}{12}$ である．

(iv)　上記以外の場合．

$$\sin\frac{\alpha+\beta}{2}<\cos\frac{\pi}{12},\qquad \cos\frac{\alpha-\beta}{2}+\cos\frac{\gamma-\delta}{2}\leqq 2$$

であるから，つねに $S<2\cos\frac{\pi}{12}$ である．

以上より，内部に円の中心を含む四角形に関しては，その面積を大きい順に 3 つ並べると，

$$2>1+\cos\frac{\pi}{12}>2\cos\frac{\pi}{12}$$

となる．

①より，

$$\cos\frac{\pi}{12}=\sqrt{\frac{2+\sqrt{3}}{4}}=\sqrt{\frac{4+2\sqrt{3}}{8}}=\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$$

であるから，$2\cos\frac{\pi}{12}=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}$ である．

一方，内部に円の中心を含まない四角形の面積は半円の面積 $\frac{\pi}{2}$ 未満であり，

$(2.4)^2<6,\ (1,4)^2<2$ より，$\sqrt{6}+\sqrt{2}>3.8>\pi$

であるから，内部に円の中心を含まない四角形の面積はすべて $2\cos\dfrac{\pi}{12}$ 未満である．

以上より，

$$S_1=2,\quad S_2=1+\cos\frac{\pi}{12},\quad S_3=2\cos\frac{\pi}{12}$$

とわかる．すなわち

$$S_2=1+\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}=\boldsymbol{\frac{4+\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}} \qquad \cdots\cdots(答)$$

である．

(2)　(1) より，$S_3=2\cos\dfrac{\pi}{12}$ であり，このとき $\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ \delta$ のうち 2 つが $\dfrac{5\pi}{12}$ で，残る 2 つが $\dfrac{7\pi}{12}$ である．この場合，四角形の形状は次の 2 つのタイプに限る．

(i)　長さの等しい辺が隣り合うタイプ．

この形の四角形は回転によって重なることはないから，24 通り存在する．

(ii)　長さの等しい辺が隣り合わないタイプ．

この四角形は長方形であり，π だけ回転すると同一の四角形となるから，$\dfrac{24}{2}=12$ 通り存在する．

以上より，面積が S_3 となる四角形は 36 通り存在し，1 つの四角形に対して P_a，P_b，P_c，P_d の順序が 4! ずつあるから，求める確率は

$$\frac{36\times 4!}{{}_{24}\mathrm{P}_4}=\boldsymbol{\frac{6}{1771}} \qquad \cdots\cdots(答)$$

である．

$\boxed{3}$

(1)

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+t\overrightarrow{\mathrm{AB}}=(0,0,2)+t(-1,0,2)=(-t,0,2+2t)\quad (t\text{ は任意の実数})$$

とおけるから,

$$\overrightarrow{\mathrm{PC}}=(1+t,1,-2-2t),\quad \overrightarrow{\mathrm{PD}}=(t,0,-1-2t),\quad \overrightarrow{\mathrm{PC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PD}}=5t^2+7t+2$$

$$|\overrightarrow{\mathrm{PC}}|^2=5t^2+10t+6,\quad |\overrightarrow{\mathrm{PD}}|^2=5t^2+4t+1$$

となる．よって, 三角形 PCD の面積を S とすると, $S=\dfrac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{\mathrm{PC}}|^2|\overrightarrow{\mathrm{PD}}|^2-(\overrightarrow{\mathrm{PC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PD}})^2}$ より

$$4S^2=(5t^2+10t+6)(5t^2+4t+1)-(5t^2+7t+2)^2=6t^2+6t+2=6\left(t+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{2}$$

となるから, $t=-\dfrac{1}{2}$ のとき S は最小値

$$S=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}=\boldsymbol{\frac{\sqrt{2}}{4}} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

をとる.

(2) $|\overrightarrow{\mathrm{DC}}|=\sqrt{3}=$QR であることに注意すると, 任意の実数 t を用いて

$$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\overrightarrow{\mathrm{OD}}+t\overrightarrow{\mathrm{DC}}=(t,t,1-t),\quad \overrightarrow{\mathrm{OR}}=\overrightarrow{\mathrm{OD}}+(t+1)\overrightarrow{\mathrm{DC}}=(t+1,t+1,-t)$$

とおける. (Q と R のおき方が逆になる場合も以下同様になる) したがって

$$\overrightarrow{\mathrm{QA}}=(-t,-t,1+t),\quad \overrightarrow{\mathrm{QB}}=(-1-t,-t,3+t),\quad \overrightarrow{\mathrm{QA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{QB}}=3t^2+5t+3$$

$$|\overrightarrow{\mathrm{QA}}|^2=3t^2+2t+1,\quad |\overrightarrow{\mathrm{QB}}|^2=3t^2+8t+10$$

となるから, 三角形 QAB と三角形 RAB の面積をそれぞれ S_1, S_2 とおくと,

$$4{S_1}^2=(3t^2+2t+1)(3t^2+8t+10)-(3t^2+5t+3)^2=6t^2-2t+1=6\left(t-\frac{1}{6}\right)^2+\frac{5}{6}$$

であり, t を $t+1$ におきかえて

$$4{S_2}^2=6\left(t+\frac{5}{6}\right)^2+\frac{5}{6}$$

となる．したがって

$$S_1+S_2=\frac{\sqrt{6}}{2}\left\{\sqrt{\left(t-\frac{1}{6}\right)^2+\frac{5}{36}}+\sqrt{\left(t+\frac{5}{6}\right)^2+\frac{5}{36}}\right\}=\frac{\sqrt{6}}{2}f(t)$$

とおくと，$f(t)$ は xy 平面上で

$$\mathrm{E}\left(-\frac{5}{6},\frac{\sqrt{5}}{6}\right),\ \mathrm{F}\left(\frac{1}{6},\frac{\sqrt{5}}{6}\right),\ \mathrm{G}(t,0)$$

とおいたときの EG+GF に一致するので，$\mathrm{F}'\left(\frac{1}{6},-\frac{\sqrt{5}}{6}\right)$ をとると直線 EF' と x 軸の交点は $\mathrm{G}'\left(-\frac{1}{3},0\right)$ となるから

$$f(t)=\mathrm{EG}+\mathrm{GF}=\mathrm{EG}+\mathrm{GF}'\geqq\mathrm{EF}'$$

であり，等号は $\mathrm{G}=\mathrm{G}'$ すなわち $t=-\frac{1}{3}$ のときに成り立つので（下図参照），求める最小値は

$$\frac{\sqrt{6}}{2}f\left(-\frac{1}{3}\right)=\frac{\sqrt{6}}{2}\cdot\sqrt{\frac{1}{4}+\frac{5}{36}}\cdot 2=\boldsymbol{\frac{\sqrt{21}}{3}}\qquad\cdots\cdots(答)$$

となる．