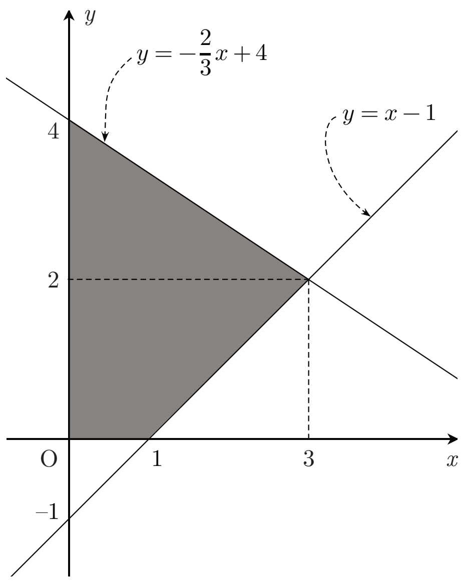
2024年度 早稲田大学 社会科学部 数学

1

(1)　D は下図の網目部となる．ただし，境界上の点を含む．



(2)
$$-2x+y=k_1\ \ (y=2x+k_1) \qquad \cdots\cdots①$$
とおくと，xy 平面において直線①と D が共有点をもつような k_1 の最大値が求めるものである．

①は，傾き 2，y 切片 k_1 の直線を表すから，k_1 が最大となるのは，上図より①が点 $(0,\ 4)$ を通るときで，求める最大値は，
$$-2\cdot 0+4=4 \qquad \cdots\cdots(答)$$
である．

(3)
$$2x+y=k_2\ \ (y=-2x+k_2) \qquad \cdots\cdots②$$
とおくと，xy 平面において直線②と D が共有点をもつような k_2 の最大値が求めるものである．

②は，傾き -2，y 切片 k_2 の直線を表すから，k_2 が最大となるのは，上図より②が点 $(3,\ 2)$ を通るときで，求める最大値は，
$$2\cdot 3+2=8 \qquad \cdots\cdots(答)$$
である．

(4)
$$ax+y=k_3\ \ (y=-ax+k_3) \qquad \cdots\cdots③$$
とおくと，xy 平面において直線③と D が共有点をもつような k_3 の最大値が求めるものである．

③は，傾き $-a$，y 切片 k_3 の直線を表すから，上図を参考にし，傾き $-a$ が $-\frac{2}{3}$ より大きいか否かで分類する．

(i)　$-a>-\frac{2}{3}$，すなわち，$a<\frac{2}{3}$ のとき

k_3 は，③が点 $(0,\ 4)$ を通るとき最大となるから，このとき，
$$k_3=a\cdot 0+4=4$$
である．

(ii)　$-a\leqq-\frac{2}{3}$，すなわち，$a\geqq\frac{2}{3}$ のとき

k_3 は，③が点 $(3,\ 2)$ を通るとき最大となるから，このとき，
$$k_3=a\cdot 3+2=3a+2$$
である．

以上より，求める最大値は，

$$\begin{cases} 4 & \left(a < \dfrac{2}{3} \text{ のとき}\right) \\ 3a+2 & \left(a \geqq \dfrac{2}{3} \text{ のとき}\right) \end{cases}$$ ……(答)

である．

［解２］

$$f(x,\ y) = ax + y$$

とおき，D における $f(x,\ y)$ の最大値を M とおく．

まず，x を固定して考えると，$f(x,\ y)$ は y の増加関数であり，y の変域は，

$$0 \leqq x \leqq 1 \text{ のとき } 0 \leqq y \leqq -\frac{2}{3}x + 4,\quad 1 \leqq x \leqq 3 \text{ のとき } x - 1 \leqq y \leqq -\frac{2}{3}x + 4$$

であるから，いずれにせよ，

$$M = f\left(x,\ -\frac{2}{3}x + 4\right) = ax + \left(-\frac{2}{3}x + 4\right) = \left(a - \frac{2}{3}\right)x + 4$$

である．

次に，x を $0 \leqq x \leqq 3$ で動かすと，M は x の高々1 次関数であるから，

$$M = \max\{f(0,\ 4),\ f(3,\ 2)\} = \max\{4,\ 3a+2\}$$

である．ただし，$\max\{p,\ q\}$ は，p，q うち小さくない方を表す．

(2)　$a = -2$ のとき，

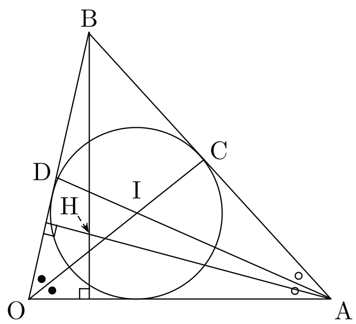
$$M = \max\{4,\ -4\} = 4$$ ……(答)

(3)　$a = 2$ のとき，

$$M = \max\{4,\ 8\} = 8$$ ……(答)

(4)
$$M = \begin{cases} 4 & \left(a < \dfrac{2}{3} \text{ のとき}\right) \\ 3a+2 & \left(a \geqq \dfrac{2}{3} \text{ のとき}\right) \end{cases}$$ ……(答)

2



⑴　直線 OC (直線 OI) は $\angle\mathrm{AOB}$ を二等分するから，

$$\mathrm{AC}:\mathrm{BC}=\mathrm{OA}:\mathrm{OB}=6:5$$

であり，

$$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\frac{5\overrightarrow{\mathrm{OA}}+6\overrightarrow{\mathrm{OB}}}{6+5}=\frac{5}{11}\vec{a}+\frac{6}{11}\vec{b} \qquad \cdots\cdots(答)$$

と表される．

⑵　直線 AI は $\angle\mathrm{OAB}$ を二等分するから，

$$\mathrm{OI}:\mathrm{IC}=\mathrm{AO}:\mathrm{AC}=6:\frac{6}{6+5}\cdot 7=11:7$$

であり，⑴の結果も用いて，

$$\overrightarrow{\mathrm{OI}}=\frac{11}{11+7}\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\frac{11}{18}\left(\frac{5}{11}\vec{a}+\frac{6}{11}\vec{b}\right)=\frac{5}{18}\vec{a}+\frac{1}{3}\vec{b} \qquad \cdots\cdots(答)$$

である．

［参考］

メネラウスの定理より，

$$\frac{\mathrm{OD}}{\mathrm{DB}}\cdot\frac{\mathrm{BA}}{\mathrm{AC}}\cdot\frac{\mathrm{CI}}{\mathrm{IO}}=1$$

$$\therefore\quad \frac{6}{7}\cdot\frac{11}{6}\cdot\frac{\mathrm{CI}}{\mathrm{IO}}=1$$

$$\therefore\quad \frac{\mathrm{CI}}{\mathrm{IO}}=\frac{7}{11}$$

これと，⑴と組んで，

$$\overrightarrow{\mathrm{OI}}=\frac{11}{7+11}\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\frac{11}{18}\left(\frac{5}{11}\vec{a}+\frac{6}{11}\vec{b}\right)=\frac{5}{18}\vec{a}+\frac{1}{3}\vec{b} \qquad \cdots\cdots(答)$$

で表される．

⑶
$$|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|^2=|\overrightarrow{\mathrm{OB}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}}|^2=|\vec{b}-\vec{a}|^2=|\vec{b}|^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{a}|^2$$

より，

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=\frac{1}{2}\left(|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2-|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|^2\right)=\frac{1}{2}(6^2+5^2-7^2)=6 \qquad \cdots\cdots(答)$$

である．

⑷
$$\overrightarrow{\mathrm{AH}}=\overrightarrow{\mathrm{OH}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\left(s\vec{a}+t\vec{b}\right)-\vec{a}=(s-1)\vec{a}+t\vec{b} \qquad \cdots\cdots(答)$$

$$\overrightarrow{\mathrm{BH}}=\overrightarrow{\mathrm{OH}}-\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\left(s\vec{a}+t\vec{b}\right)-\vec{b}=s\vec{a}+(t-1)\vec{b} \qquad \cdots\cdots(答)$$

⑸　$\mathrm{AH}\perp\mathrm{OB}$ かつ $\mathrm{BH}\perp\mathrm{OA}$ より，

$$\overrightarrow{\mathrm{AH}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}=0 \text{ かつ } \overrightarrow{\mathrm{BH}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}}=0$$

$$\therefore\quad \left\{(s-1)\vec{a}+t\vec{b}\right\}\cdot\vec{b}=0 \text{ かつ } \left\{s\vec{a}+(t-1)\vec{b}\right\}\cdot\vec{a}=0$$

展開して，$|\vec{a}|=6$，$|\vec{b}|=5$，$\vec{a}\cdot\vec{b}=6$ を用いて整理すると，

$$6(s-1)+25t=0 \text{ かつ } 36s+6(t-1)=0$$

$$\therefore\quad 6s+25t=6 \text{ かつ } 6s+t=1$$

よって，求める s，t の値は，

$$s=\frac{19}{144},\ t=\frac{5}{24}$$ ……(答)

である．

［解２］

$\angle\mathrm{AOB}=\theta$ とおくと，$\triangle\mathrm{OAB}$ において余弦定理より，

$$\cos\theta=\frac{6^2+5^2-7^2}{2\cdot 6\cdot 5}=\frac{1}{5}$$

であり，

$$\sin\theta=\sqrt{1-\cos^2\theta}=\sqrt{1-\left(\frac{1}{5}\right)^2}=\frac{2\sqrt{6}}{5}$$

であるから，$\mathrm{O}(0,\ 0)$，$\mathrm{A}(6,\ 0)$，$\mathrm{B}(1,\ 2\sqrt{6})$ とする xy 座標系がとれる．

⑶ $\vec{a}\cdot\vec{b}=6\cdot 1+0\cdot 2\sqrt{6}=6$ ……(答)

⑸ ⑷より，

$$\overrightarrow{\mathrm{AH}}=(6(s-1)+t,\ 2\sqrt{6}t),\ \overrightarrow{\mathrm{BH}}=(6s+t-1,\ 2\sqrt{6}(t-1))$$

であるから，$\mathrm{AH}\perp\mathrm{OB}$ かつ $\mathrm{BH}\perp\mathrm{OA}$ より，

$$\overrightarrow{\mathrm{AH}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}=0 \text{ かつ } \overrightarrow{\mathrm{BH}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}}=0$$

$$\therefore\ \{6(s-1)+t\}\cdot 1+2\sqrt{6}t\cdot 2\sqrt{6}=0 \text{ かつ } (6s+t-1)\cdot 6+2\sqrt{6}(t-1)\cdot 0=0$$

$$\therefore\ 6s+25t=6 \text{ かつ } 6s+t=1$$

$$s=\frac{19}{144},\ t=\frac{5}{24}$$ ……(答)

3

$k>0,\ a_j>0\ (j=1,\ 2,\ \cdots,\ n),\ a_1=k<a_2<a_3<\cdots<a_n$ ……①

であることに注意する．

(1)(2)　①より，

$$a_2-k<a_3-k<\cdots<a_n-k$$

であるから，$a_i-k\ (i=2,\ 3,\ \cdots,\ n)$ を小さい順に並べた集合 S_1 は，

$$S_1=\{a_2-k,\ a_3-k,\ \cdots,\ a_n-k\}$$

である．

よって，S_1 の要素がすべて S の要素となるとき，$a_n-k<a_n$ に注意すると，

$$a_2-k=a_1=k,\ a_3-k=a_2,\ \cdots,\ a_n-k=a_{n-1}$$

すなわち，

$$a_2=2k,\ a_3=3k,\ \cdots,\ a_n=nk$$

であるから，

$a_2=2k$ ……(1)の（答）

$a_n=nk$ ……(2)の（答）

である．

＊$\{a_n\}$ は初項 k，公差 k の等差数列である．

(3)　①より，

$$\frac{a_2}{k}<\frac{a_3}{k}<\cdots<\frac{a_n}{k}$$

であるから，$\dfrac{a_i}{k}\ (i=2,\ 3,\ \ldots,\ n)$ を小さい順に並べた集合 S_2 は，

$$S_2=\left\{\frac{a_2}{k},\ \frac{a_3}{k},\ \cdots,\frac{a_n}{k}\right\}$$

である．

（i）　$0<k<1$ のとき

$\dfrac{a_n}{k}>a_n$ より，S_2 の要素がすべて S の要素となることはない．

（ii）　$k=1$ のとき

$$S_2=\{a_2,\ a_3,\ \cdots,\ a_n\}$$

である．

（iii）　$k>1$ のとき

S_2 の要素がすべて S の要素となるとき，$\dfrac{a_n}{k}<a_n$ に注意すると，

$$\frac{a_2}{k}=a_1,\ \frac{a_3}{k}=a_2,\ \cdots,\ \frac{a_n}{k}=a_{n-1}$$

$$\therefore\quad a_2=k^2,\ a_3=k^3,\ \cdots,\ a_n=k^n$$

以上より，$\dfrac{a_i}{k}\ (i=2,\ 3,\ \ldots,\ n)$ がすべて S の要素となるとき，$k\geqq 1$ が必要で，

$$\begin{cases} k=1\ \text{のときは，}\ a_n=(S\ \text{の最大の要素}) \\ k>1\ \text{のときは，}\ a_n=k^n \end{cases}$$ ……（答）

である．

＊$\{a_n\}$ は初項 k，公比 k の等比数列である．

＊$k=1$ のとき，a_n は S に依存する．

＊$k>1$ のとき，(3)は対数をとれば，(1)，(2)と同様の考察に帰着する．等比数列は，対数が等差数列である．