

理系②

(1) $f(x) = x^3 + 3px^2 + 3mx$ より,

$$f'(x) = 3x^2 + 6px + 3m = 3(x^2 + 2px + m)$$

3 次関数 $f(x)$ が $x = \alpha$ で極大値をとり, $x = \beta$ で極小値をとるとき,

$$2 \text{ 次方程式 } f'(x) = 0 \quad \text{すなわち} \quad x^2 + 2px + m = 0 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

は異なる 2 実数解 α, β ($\alpha < \beta$) をもつから, ①の判別式を D とすると,

$$\frac{D}{4} = (-p)^2 - m = p^2 - m > 0$$

であり, ①の 2 実数解は,

$$x = -p \pm \sqrt{p^2 - m}$$

であるから,

$$\alpha = -p - \sqrt{p^2 - m}, \quad \beta = -p + \sqrt{p^2 - m} \quad \therefore \quad \beta - \alpha = 2\sqrt{p^2 - m}$$

このとき,

$$f'(x) = 3(x - \alpha)(x - \beta)$$

であるから,

$$\begin{aligned} f(\alpha) - f(\beta) &= \left[f(x) \right]_{\beta}^{\alpha} = \int_{\beta}^{\alpha} f'(x) dx \\ &= \int_{\beta}^{\alpha} 3(x - \alpha)(x - \beta) dx \\ &= 3 \left(-\frac{1}{6} \right) (\alpha - \beta)^3 \\ &= \frac{1}{2} (\beta - \alpha)^3 \\ &= \frac{1}{2} (2\sqrt{p^2 - m})^3 \\ &= 4(p^2 - m)^{\frac{3}{2}} \quad \cdots \cdots \textcircled{2} \quad (\text{答}) \end{aligned}$$

(2) p と m が $f(\alpha) - f(\beta) = 4$ を満たすとき, ②より,

$$4(p^2 - m)^{\frac{3}{2}} = 4 \quad \therefore \quad p^2 - m = 1 \quad \therefore \quad m = p^2 - 1 \quad \cdots \cdots \textcircled{3}$$

また, $f'(x) = 3x^2 + 6px + 3m$ より,

$$f''(x) = 6x + 6p = 6(x + p)$$

$f''(x)$ は $x = -p$ の前後で符号が変化するから, 曲線 $y = f(x)$ の変曲点を (X, Y) とすると,

$$X = -p \quad \cdots \cdots \textcircled{4}$$

これと③より,

$$\begin{aligned} Y &= f(X) = f(-p) = (-p)^3 + 3p(-p)^2 + 3m(-p) \\ &= 2p^3 - 3mp = 2p^3 - 3(p^2 - 1)p = -p^3 + 3p \quad \cdots \cdots \textcircled{5} \end{aligned}$$

④より $p = -X$ であり, ⑤に代入して,

$$Y = -(-X)^3 + 3(-X) = X^3 - 3X$$

ここで, p はすべての実数値をとり得るから, X もすべての実数値をとり得る.

よって, 求める軌跡は,

$$\text{曲線 } y = x^3 - 3x \quad \cdots \cdots (\text{答})$$

(注) $f(\alpha) - f(\beta)$ の計算は次のようにしてもよい.

①の2解が α, β であるから,

$$\alpha + \beta = -2p, \quad \alpha\beta = m$$

これと $\beta - \alpha = 2\sqrt{p^2 - m}$ より,

$$\begin{aligned} f(\alpha) - f(\beta) &= (\alpha^3 - \beta^3) + 3p(\alpha^2 - \beta^2) + 3m(\alpha - \beta) \\ &= (\alpha - \beta)(\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2) + 3p(\alpha - \beta)(\alpha + \beta) + 3m(\alpha - \beta) \\ &= (\alpha - \beta)\{(\alpha + \beta)^2 - \alpha\beta + 3p(\alpha + \beta) + 3m\} \\ &= -2\sqrt{p^2 - m}\{(-2p)^2 - m + 3p(-2p) + 3m\} \\ &= -2\sqrt{p^2 - m}(-2p^2 + 2m) \\ &= 4\sqrt{p^2 - m}(p^2 - m) \\ &= 4(p^2 - m)^{\frac{3}{2}} \end{aligned}$$

3

$\vec{AO} = (0, -1, -1)$, $\vec{AP} = (x, y-1, -1)$ および $\angle OAP = 30^\circ$ より,

$$\vec{AO} \cdot \vec{AP} = |\vec{AO}| |\vec{AP}| \cos 30^\circ$$

$$\therefore \sqrt{2}(-y+2) = \sqrt{3} \sqrt{x^2 + (y-1)^2 + 1}$$

$-y+2 \geq 0$ のもとで,

$$2(y-2)^2 = 3(x^2 + y^2 - 2y + 2)$$

$$\therefore (y+1)^2 = 3 - 3x^2 \quad \dots\dots ①$$

$1 \leq y+1 \leq 3$ および①より,

$$1 \leq 3 - 3x^2 \leq 9 \quad \therefore -\frac{\sqrt{6}}{3} \leq x \leq \frac{\sqrt{6}}{3} \quad \dots\dots ②$$

このとき $y+1 = \sqrt{3-3x^2}$ である.

$z = (x+1)(y+1)$ とおく. ②より $x+1 > 0$ に留意すれば,

$$z = (x+1)\sqrt{3-3x^2} = \sqrt{3(x+1)^2(1-x^2)} = \sqrt{3(x+1)^3(1-x)}$$

$f(x) = 3(x+1)^3(1-x)$ とおく.

$$\begin{aligned} f'(x) &= 9(x+1)^2(1-x) - 3(x+1)^3 \\ &= 3(x+1)^2\{3(1-x) - (x+1)\} \\ &= -6(x+1)^2(2x-1) \end{aligned}$$

これより,

x	$-\frac{\sqrt{6}}{3}$	$\dots$	$\frac{1}{2}$	$\dots$	$\frac{\sqrt{6}}{3}$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$\left(1 - \frac{\sqrt{6}}{3}\right)^2$	$\nearrow$	$\frac{81}{16}$	$\searrow$	$\left(1 + \frac{\sqrt{6}}{3}\right)^2$

ここで $f\left(\pm\frac{\sqrt{6}}{3}\right)$ の値は $f(x) = 3(x+1)^2(1-x^2)$ を用いて計算した. $z = \sqrt{f(x)}$ より,

$$(z \text{ の最大値}) = \frac{9}{4}, \quad (z \text{ の最小値}) = 1 - \frac{\sqrt{6}}{3} \quad \dots\dots (\text{答})$$

《注》 ①より $x^2 + \frac{(y+1)^2}{3} = 1$ であるから P は xy 平面上の楕円上にある. よって,

$$x = \cos \theta, \quad y = \sqrt{3} \sin \theta - 1 \quad (0 \leq \theta < 2\pi)$$

とおける. ただし $y \geq 0$ より θ は,

$$\sqrt{3} \sin \theta - 1 \geq 0$$

によって定まる範囲を動く. このとき,

$$z = \sqrt{3} \sin \theta (\cos \theta + 1)$$

と θ を用いて表せる.

(1) $-1 \leq \sin x \leq 1$ および $\frac{1}{x^2} > 0$ より, $-\frac{1}{x^2} \leq \frac{\sin x}{x^2} \leq \frac{1}{x^2}$ である.

各辺を $(0 <) t \leq x \leq 2t$ で積分すると,

$$-\int_t^{2t} \frac{1}{x^2} dx \leq \int_t^{2t} \frac{\sin x}{x^2} dx \leq \int_t^{2t} \frac{1}{x^2} dx$$

が成り立つ. ここで, $\int_t^{2t} \frac{1}{x^2} dx = \left[-\frac{1}{x}\right]_t^{2t} = \frac{1}{2t}$ より,

$$-\frac{1}{t} < -\frac{1}{2t} \leq \int_t^{2t} \frac{\sin x}{x^2} dx \leq \frac{1}{2t} < \frac{1}{t} \quad \therefore -\frac{1}{t} < \int_t^{2t} \frac{\sin x}{x^2} dx < \frac{1}{t}$$

が成り立つ.

(証明終わり)

(2) 部分積分法により,

$$\begin{aligned} \int_t^{2t} \frac{\cos x}{x} dx &= \left[\frac{\sin x}{x}\right]_t^{2t} + \int_t^{2t} \frac{\sin x}{x^2} dx \\ &= \frac{\sin 2t}{2t} - \frac{\sin t}{t} + \int_t^{2t} \frac{\sin x}{x^2} dx \end{aligned}$$

である. ここで, $0 \leq \left|\frac{\sin t}{t}\right| \leq \frac{1}{t}$ であり, $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} = 0$ より, はさみうちの原理から,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\sin t}{t} = 0 \quad \dots\dots ①$$

である. また, (1) から同様にすると,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \int_t^{2t} \frac{\sin x}{x^2} dx = 0 \quad \dots\dots ②$$

である. ①, ②より,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \int_t^{2t} \frac{\cos x}{x} dx = \lim_{t \rightarrow \infty} \left(\frac{\sin 2t}{2t} - \frac{\sin t}{t} + \int_t^{2t} \frac{\sin x}{x^2} dx \right) = 0$$

が成り立つ.

(証明終わり)

(3) $I(t) = \int_1^t \frac{f(x)}{x} dx$, $\alpha = \frac{1}{2} \int_1^2 \frac{\cos x}{x} dx$ とおく.

積と和の公式より, $f(x) = \frac{1}{2}(\cos x - \cos 2x)$ であるから,

$$\begin{aligned} 2\{I(t) - \alpha\} &= \int_1^t \frac{\cos x - \cos 2x}{x} dx - \int_1^2 \frac{\cos x}{x} dx \\ &= \int_1^t \frac{\cos x}{x} dx - \int_1^t \frac{\cos 2x}{x} dx - \int_1^2 \frac{\cos x}{x} dx \end{aligned}$$

と変形できる. 第2項において, $y = 2x$ と置換すると, $\frac{dx}{dy} = \frac{1}{2}$ より,

$$\begin{aligned}
2\{I(t) - \alpha\} &= \int_1^t \frac{\cos x}{x} dx - \int_2^{2t} \frac{2 \cos y}{y} \frac{dx}{dy} dy - \int_1^2 \frac{\cos x}{x} dx \\
&= \int_1^t \frac{\cos x}{x} dx - \int_2^{2t} \frac{\cos x}{x} dx - \int_1^2 \frac{\cos x}{x} dx \\
&= - \int_t^{2t} \frac{\cos x}{x} dx
\end{aligned}$$

である。したがって、(2) より、

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \{I(t) - \alpha\} = 0 \quad \therefore \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \int_1^t \frac{f(x)}{x} dx = \frac{1}{2} \int_1^2 \frac{\cos x}{x} dx$$

が成り立つ。

(証明終わり)

(注) (1) は $\left| \int_t^{2t} \frac{\sin x}{x^2} dx \right| \leq \int_t^{2t} \left| \frac{\sin x}{x^2} \right| dx$ を用いて、次のように考えてもよい。

$|\sin x| \leq 1$ および $\frac{1}{x^2} > 0$ より、 $\left| \frac{\sin x}{x^2} \right| \leq \frac{1}{x^2}$ であり、両辺を $(0 <) t \leq x \leq 2t$ で積分すると、

$$\int_t^{2t} \left| \frac{\sin x}{x^2} \right| dx \leq \int_t^{2t} \frac{1}{x^2} dx$$

が成り立つ。ここで、 $\int_t^{2t} \frac{1}{x^2} dx = \left[-\frac{1}{x} \right]_t^{2t} = \frac{1}{2t}$ より、

$$\left| \int_t^{2t} \frac{\sin x}{x^2} dx \right| \leq \frac{1}{2t} < \frac{1}{t} \quad \therefore \quad -\frac{1}{t} < \int_t^{2t} \frac{\sin x}{x^2} dx < \frac{1}{t}$$

が成り立つ。

5

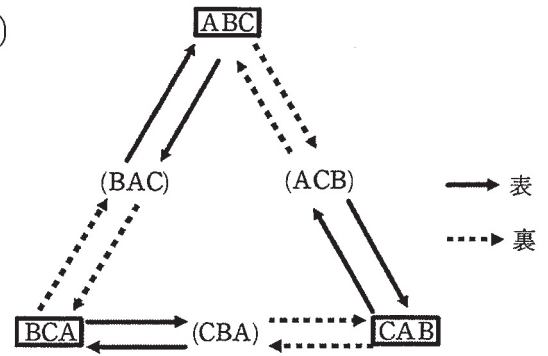
コインを1回投げると、文字列は右下のように変化する。

最初の文字列が ABC であることから、コインを n 回続けて投げたあとの文字列は、

n が偶数のとき ABC または BCA または CAB... (*)

n が奇数のとき BAC または ACB または CBA... (**)

にそれぞれ限られる。コインを n 回続けて投げたあとの文字列が ABC, BCA である確率はそれぞれ p_n, q_n であり、コインを n 回続けて投げたあとの文字列が CAB である確率を r_n とおくと、右の図から正の整数 k に対して、



$$\begin{cases} p_{2k+2} = \frac{1}{2}p_{2k} + \frac{1}{4}q_{2k} + \frac{1}{4}r_{2k} & \dots \textcircled{1} \\ q_{2k+2} = \frac{1}{4}p_{2k} + \frac{1}{2}q_{2k} + \frac{1}{4}r_{2k} & \dots \textcircled{2} \\ r_{2k+2} = \frac{1}{4}p_{2k} + \frac{1}{4}q_{2k} + \frac{1}{2}r_{2k} & \dots \textcircled{3} \end{cases}$$

が成り立つ。また、最初の文字列が ABC であることから $p_0 = 1, q_0 = r_0 = 0$ とすると $k = 0$ でも ①～③ は成り立つ。さらに 0 以上の整数 k に対して、(*) より、

$$p_{2k} + q_{2k} + r_{2k} = 1 \quad \dots \textcircled{4}$$

(**) より、

$$p_{2k+1} = q_{2k+1} = r_{2k+1} = 0$$

である。

(1) ① - ② より、

$$p_{2k+2} - q_{2k+2} = \frac{1}{4}(p_{2k} - q_{2k})$$

よって、

$$p_{2k} - q_{2k} = (p_0 - q_0) \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^k = \left(\frac{1}{4}\right)^k \quad \dots \textcircled{5} \quad \dots (\text{答})$$

(2) ① - ③ と $p_0 = 1, r_0 = 0$ より、(1) と同様にして (q_{2k} を r_{2k} に置き換えて)、

$$p_{2k} - r_{2k} = \left(\frac{1}{4}\right)^k \quad \dots \textcircled{6}$$

である. ⑤ + ⑥ より,

$$2p_{2k} - (q_{2k} + r_{2k}) = 2 \left(\frac{1}{4} \right)^k$$

④ より, $q_{2k} + r_{2k} = 1 - p_{2k}$ であるから,

$$2p_{2k} - (1 - p_{2k}) = 2 \left(\frac{1}{4} \right)^k \quad \therefore p_{2k} = \frac{1}{3} + \frac{2}{3} \left(\frac{1}{4} \right)^k$$

n が偶数のとき, $n = 2k \iff k = \frac{n}{2}$ より,

$$p_n = \frac{1}{3} + \frac{2}{3} \left(\frac{1}{4} \right)^{\frac{n}{2}} = \frac{1}{3} + \frac{2}{3} \left(\frac{1}{2} \right)^n$$

以上より,

$$p_n = \begin{cases} 0 & (n \text{ が奇数のとき}) \\ \frac{1}{3} + \frac{2}{3} \left(\frac{1}{2} \right)^n & (n \text{ が偶数のとき}) \end{cases} \quad \dots (\text{答})$$

(注) (2) では, $q_{2k} + r_{2k} = 1 - p_{2k}$ より,

$$\textcircled{1} \iff p_{2k+2} = \frac{1}{2}p_{2k} + \frac{1}{4}(1 - p_{2k})$$

として, $\{p_{2k}\}$ の漸化式を直接作ってもよい.

また, ① + ② より, $\{p_{2k} + q_{2k}\}$ の一般項を求め, (1) の結果と連立し p_{2k} を求めてもよい.