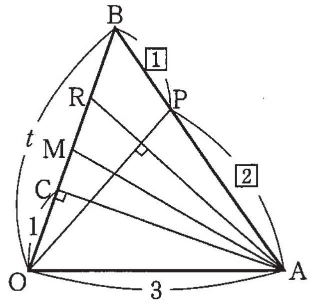
2025年度 大阪大学 前期 数学 文系

$\boxed{1}$



（1） $\angle$AOB は鋭角であるから，直角三角形 OAC に着目すると

$$\cos\angle AOB = \cos\angle AOC = \frac{1}{3}$$

である．よって

$$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB} = 3\cdot t\cdot\frac{1}{3} = \boldsymbol{t} \quad \cdots\cdots (\text{答})$$

（2） 点 P は線分 AB を 2 : 1 に内分するから

$$\overrightarrow{OP} = \frac{\overrightarrow{OA}+2\overrightarrow{OB}}{2+1} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{OA}+2\overrightarrow{OB})$$

点 R は直線 OB 上にあるから，k を実数として

$$\overrightarrow{OR} = k\overrightarrow{OB}$$

と表せる．また，$\overrightarrow{OP}\perp\overrightarrow{AR}$ であるから

$$\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{AR} = 0$$

$$\frac{1}{3}(\overrightarrow{OA}+2\overrightarrow{OB})\cdot(\overrightarrow{OR}-\overrightarrow{OA}) = 0$$

$$\frac{1}{3}(\overrightarrow{OA}+2\overrightarrow{OB})\cdot(k\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}) = 0$$

$$-|\overrightarrow{OA}|^2 + 2k|\overrightarrow{OB}|^2 + (k-2)\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB} = 0$$

$$-9 + 2kt^2 + (k-2)t = 0$$

$$(2t^2+t)k = 2t+9$$

$t>0$ より $2t^2+t>0$ であるから

$$k = \frac{2t+9}{2t^2+t}$$

$k>0$ であることに注意して

$$|\overrightarrow{OR}| = |k||\overrightarrow{OB}| = kt = \boldsymbol{\frac{2t+9}{2t+1}} \quad \cdots\cdots (\text{答})$$

（3） 点 R が線分 MB 上にある条件は $\frac{1}{2}\leqq k\leqq 1$ であるから

$$\frac{1}{2} \leqq \frac{2t+9}{2t^2+t} \leqq 1$$

$$\begin{cases} 2t^2+t \leqq 2(2t+9) \\ 2t+9 \leqq 2t^2+t \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2t^2-3t-18 \leqq 0 & \cdots\cdots ① \\ 2t^2-t-9 \geqq 0 & \cdots\cdots ② \end{cases}$$

① より $\dfrac{3-3\sqrt{17}}{4} \leqq t \leqq \dfrac{3+3\sqrt{17}}{4}$

② より $t \leqq \dfrac{1-\sqrt{73}}{4}$, $\dfrac{1+\sqrt{73}}{4} \leqq t$

$\dfrac{3+3\sqrt{17}}{4} = \dfrac{3+\sqrt{153}}{4} > \dfrac{1+\sqrt{73}}{4}$ であることに注意して，

$t>0$ も合わせると，求める t の値の範囲は

$$\boldsymbol{\frac{1+\sqrt{73}}{4} \leqq t \leqq \frac{3+3\sqrt{17}}{4}} \quad \cdots\cdots (\text{答})$$

$\boxed{2}$ (1) 正の整数 k, ℓ に対して,

$$\begin{aligned}\frac{k}{k+\ell-1}a_{k+1}a_\ell+\frac{\ell}{k+\ell-1}a_k a_{\ell+1} &= \frac{k}{k+\ell-1}\cdot\frac{2k-1}{2k}a_k\cdot a_\ell+\frac{\ell}{k+\ell-1}a_k\cdot\frac{2\ell-1}{2\ell}a_\ell\\ &= \left\{\frac{2k-1}{2(k+\ell-1)}+\frac{2\ell-1}{2(k+\ell-1)}\right\}a_k a_\ell\\ &= \frac{2(k+\ell-1)}{2(k+\ell-1)}a_k a_\ell\\ &= a_k a_\ell\end{aligned}$$

(証明終わり)

(2) 正の整数 m に対して,

$$S_m=\sum_{k=1}^{m}a_k a_{m-k+1}$$

とおく.

$1\leqq k\leqq m$ を満たす整数 k に対し, $m-k+1$ は正の整数である.

(1) より,

$$\begin{aligned}a_k a_{m-k+1} &= \frac{k}{m}a_{k+1}a_{m-k+1}+\frac{m-k+1}{m}a_k a_{m-k+2}\\ &= \frac{ka_{k+1}a_{m-k+1}-(k-1)a_k a_{m-(k-1)+1}}{m}+a_k a_{m-k+2}\end{aligned}$$

であるから,

$$\begin{aligned}S_m &= \sum_{k=1}^{m}a_k a_{m-k+1}\\ &= \sum_{k=1}^{m}\frac{ka_{k+1}a_{m-k+1}-(k-1)a_k a_{m-(k-1)+1}}{m}+\sum_{k=1}^{m}a_k a_{m-k+2}\\ &= \frac{ma_{m+1}a_1-0}{m}+\sum_{k=1}^{m}a_k a_{m-k+2}\\ &= a_{m+1}a_1+\sum_{k=1}^{m}a_k a_{m-k+2}\\ &= \sum_{k=1}^{m+1}a_k a_{(m+1)-k+1}\\ &= S_{m+1}\end{aligned}$$

これを繰り返し用いると,

$$S_m=S_1={a_1}^2=1$$

したがって,

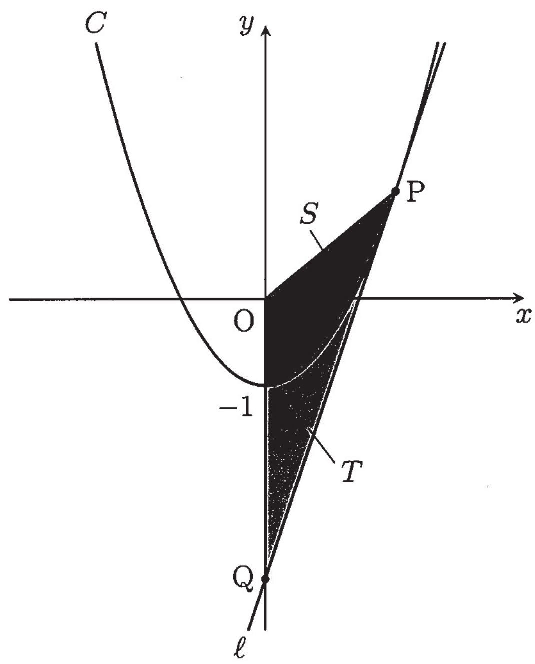
$$\sum_{k=1}^{m}a_k a_{m-k+1}=1$$

(証明終わり)

((2) の部分的別解)

$$\begin{aligned}
S_m &= \sum_{k=1}^{m} \frac{k}{m} a_{k+1} a_{m-k+1} + \sum_{k=1}^{m} \frac{m-k+1}{m} a_k a_{m-k+2} \\
&= \frac{a_2 a_m + 2a_3 a_{m-1} + \cdots + m a_{m+1} a_1}{m} + \frac{m a_1 a_{m+1} + (m-1)\, a_2 a_m + \cdots + a_m a_2}{m} \\
&= \frac{m a_1 a_{m+1} + m a_2 a_m + \cdots + m a_{m+1} a_1}{m} \\
&= a_1 a_{m+1} + a_2 a_m + \cdots + a_{m+1} a_1 \\
&= S_{m+1}
\end{aligned}$$

$\boxed{3}$



点 P の座標を $(p,\ p^2-1)$ とする.

まず，$p>0$ の場合を考える.

$y=x^2-1$ のとき $y'=2x$ であることから，

ℓ の方程式は $y-(p^2-1)=2p(x-p)$

すなわち $y=2px-p^2-1$ である.

ℓ と y 軸の交点を $\mathrm{Q}(0,-p^2-1)$ とすると，

$S+T=(\triangle\mathrm{OPQ}\text{ の面積})=\dfrac{1}{2}p(p^2+1)$ である.

さらに，

$$\begin{aligned}T&=\int_0^p\{(x^2-1)-(2px-p^2-1)\}dx\\&=\int_0^p(x-p)^2dx=\left[\frac{1}{3}(x-p)^3\right]_0^p=\frac{p^3}{3}\end{aligned}$$

が得られるから，

$$\begin{aligned}S-T&=(S+T)-2T\\&=\frac{1}{2}p(p^2+1)-\frac{2}{3}p^3\\&=-\frac{p^3}{6}+\frac{p}{2}\end{aligned}$$

と表せる．$f(p)=-\dfrac{p^3}{6}+\dfrac{p}{2}$ とおくと，$f'(p)=-\dfrac{1}{2}(p+1)(p-1)$ である.

したがって，$p>0$ における $f(p)$ の増減は次の表のようになる.

p	(0)	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(p)$		$+$	0	$-$
$f(p)$		$\nearrow$	$\frac{1}{3}$	$\searrow$

$p<0$ の場合，y 軸に関する対称移動により $p>0$ の場合に帰着できる.

以上から，$S-T$ の最大値は $\boldsymbol{\dfrac{1}{3}}$　　$\cdots\cdots$ **(答)**

[部分的別解]

直線 OP の方程式が $y=\dfrac{p^2-1}{p}x$ であることから，S を直接求めると，

$S=\displaystyle\int_0^p\left\{\frac{p^2-1}{p}x-(x^2-1)\right\}dx=\left[-\frac{x^3}{3}+\frac{p^2-1}{2p}x^2+x\right]_0^p=\frac{p^3}{6}+\frac{p}{2}$ である.