2025年度 一橋大学 前期 数学

$\boxed{1}$

⑴　$2025=3^4\cdot 5^2$であるから,

$$d(2025)=(4+1)(2+1)=5\cdot 3$$

であり,

$$f(2025)=\frac{d(2025)}{\sqrt{2025}}=\frac{5\cdot 3}{3^2\cdot 5}=\frac{1}{3}$$

である.

⑵　素数 p，正の整数 k に対して,

$$f(p^k)=\frac{d(p^k)}{\sqrt{p^k}}=\frac{k+1}{\sqrt{p^k}},\quad f(p^{k+1})=\frac{d(p^{k+1})}{\sqrt{p^{k+1}}}=\frac{k+2}{\sqrt{p^{k+1}}}$$

であるから,

$$f(p^k)\leqq f(p^{k+1})\Leftrightarrow \frac{k+1}{\sqrt{p^k}}\leqq\frac{k+2}{\sqrt{p^{k+1}}}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{p}\leqq\frac{k+2}{k+1}\quad\cdots①$$

である．p が素数であることより $p\geqq 2$ であるから，①が成り立つならば,

$$\sqrt{2}\leqq\frac{k+2}{k+1}\qquad\therefore\quad \sqrt{2}(k+1)\leqq k+2$$

$$\therefore\quad k\leqq\frac{2-\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1}=\sqrt{2}$$

でなければならない．k は正の整数であるから,

$$k=1$$

でなければならず，このとき，①は,

$$\sqrt{p}\leqq\frac{3}{2}\qquad\therefore\quad p\leqq\frac{9}{4}$$

であるから，これを満たす素数 p は

$$p=2$$

のみである.

以上から,

$$(p,\ k)=(2,\ 1)$$

である.

⑶　まず，$f(1)=\dfrac{d(1)}{\sqrt{1}}=\dfrac{1}{1}=1$ である．$\cdots②$

次に，$n\geqq 2$ のとき，n の素因数分解を

$$n={p_1}^{k_1}{p_2}^{k_2}{p_3}^{k_3}\cdots$$

（p_1，p_2，p_3，…は相異なる素数，k_1，k_2，k_3，…は正の整数）

とするとき，$d(n)=(k_1+1)(k_2+1)(k_3+1)\cdots$であるから,

$$f(n)=\frac{(k_1+1)(k_2+1)(k_3+1)\cdots}{\sqrt{{p_1}^{k_1}{p_2}^{k_2}{p_3}^{k_3}\cdots}}=\frac{k_1+1}{\sqrt{{p_1}^{k_1}}}\cdot\frac{k_2+1}{\sqrt{{p_2}^{k_2}}}\cdot\frac{k_3+1}{\sqrt{{p_3}^{k_3}}}\cdots\cdots$$

$$=f({p_1}^{k_1})f({p_2}^{k_2})f({p_3}^{k_3})\cdots\cdots\quad\cdots③$$

である.

素数 p に対して，$f(p)=\dfrac{2}{\sqrt{p}}$ であること，および⑵より,

$$1 < f(2) < f(2^2) > f(2^3) > \cdots$$
$$1 < f(3) > f(3^2) > f(3^3) > \cdots$$

p が 5 以上の素数であるとき，

$$1 > f(p) > f(p^2) > f(p^3) > \cdots$$

したがって，③が最大になるのは，n の素因数分解が$2^2 \cdot 3$のときであり，

$$f(2^2 \cdot 3) = \frac{d(2^2 \cdot 3)}{\sqrt{2^2 \cdot 3}} = \frac{(2+1)(1+1)}{2\sqrt{3}} = \sqrt{3}$$

である．…④

②，④より，$f(n)$の最大値は$\sqrt{3}$であり，そのときの n は$2^2 \cdot 3 = 12$ である．

$\boxed{2}$

(1)　O を原点とし，P$(2,\ p)$とする．

$$C_1 : x^2+y^2=9 \quad \cdots①,\ C_2 : (x-2)^2+(y-p)^2=1 \quad \cdots②$$

①－②より，

$$4x+2py-p^2-12=0 \quad \cdots③$$

である．{①，②}⇔{①，③}より，C_1とC_2が共有点を 2 つもつ条件は，

C_1と直線③が共有点を 2 つもつ

ことである．よって，

$$\frac{|-p^2-12|}{\sqrt{4^2+(2p)^2}}<3 \iff (p^2+12)^2<9(4p^2+16)$$

$$\iff p^2(p^2-12)<0$$

$$\iff 0<p^2<12$$

である．求める P の y 座標 p の範囲は，

$$-2\sqrt{3}<p<0 \text{ または } 0<p<2\sqrt{3} \quad \cdots④$$

である．

(2)　C_1とC_2が共有点を通る直線はただ 1 つであるから，l は③である．

C_1とC_2の中心間を結ぶ直線 OP は l に垂直であるから，Q は OP 上にある．よって，$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=t\overrightarrow{\mathrm{OP}}$を満たす実数 t が存在し Q$(x,\ y)$とおくと，

$$x=2t \quad \cdots⑤,\ y=pt \quad \cdots⑥$$

となる．また，P と Q が l に関して対称であることから，PQ の中点は③上にあり，

$$4\cdot\frac{2t+2}{2}+2p\cdot\frac{pt+p}{2}-p^2-12=0 \qquad \therefore\quad (p^2+4)t=8 \quad \cdots⑦$$

である．

点 Q の軌跡は，

④，⑤，⑥，⑦をすべて満たす実数 p，t が存在するような点$(x,\ y)$全体の集合

である．⑦，⑤より，$x>0$ であることに注意すると，⑤，⑥より，

$$t=\frac{x}{2} \quad \cdots⑧,\ p=\frac{2y}{x} \quad \cdots⑨$$

であるから，⑧，⑨を⑦に代入して，

$$\left\{\left(\frac{2y}{x}\right)^2+4\right\}\frac{x}{2}=8 \qquad \therefore\quad x^2+y^2-4x=0 \quad \cdots⑩$$

また，④，すなわち，$0<|p|<2\sqrt{3}$と⑨より，

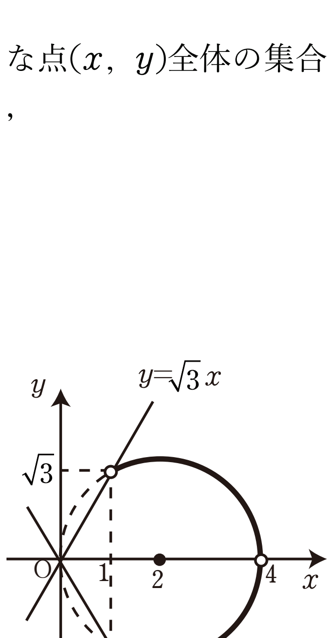
$$0<\left|\frac{2y}{x}\right|<2\sqrt{3} \quad \cdots⑪$$

である．求める軌跡は⑩かつ⑪であり，

$x^2+y^2-4x=0$　の　“$y \neq 0$ かつ $-\sqrt{3}x<y<\sqrt{3}x$”

を満たす部分であり，図の太線部分の円弧である．

ただし，$(1,\ \pm\sqrt{3})$，$(4,\ 0)$は除く．



$\boxed{3}$

$$6\int_0^2 |x^2-a|\,dx = a^2-2a+k \quad \cdots\cdots①$$

$f(x)=x^2-a$，$I=\displaystyle\int_0^2 |f(x)|\,dx$ とおくと，①は，

$$6I=a^2-2a+k,\ \text{すなわち},\ -a^2+2a+6I=k$$

となる．

①が成り立つ実数 a がちょうど 4 つ存在する条件は，$g(a)=-a^2+2a+6I$ とおくと，

ay 平面において，2 つのグラフ $y=g(a)$ と $y=k$ が相異なる 4 個の共有点をもつ　……(＊)

ことである．

一方，

$a \leqq 0$ のとき，$0 \leqq x \leqq 2$ において $f(x) \geqq 0$
$0 \leqq a \leqq 4$ のとき，$0 \leqq x \leqq \sqrt{a}$ において $f(x) \leqq 0$，$\sqrt{a} \leqq x \leqq 2$ おいて $f(x) \geqq 0$
$4 \leqq a$ のとき，$0 \leqq x \leqq 2$ において $f(x) \leqq 0$

である．$f(x)$ の不定積分の 1 つを $F(x)=\dfrac{x^3}{3}-ax$ とおく．

(ｉ) $a \leqq 0$ のとき

$$I=\int_0^2 f(x)\,dx = F(2)-F(0)=\frac{8}{3}-2a$$

であり，

$$g(a)=-a^2+2a+6\left(\frac{8}{3}-2a\right)=-a^2-10a+16=-(a+5)^2+41$$

となる．

(ii) $0 \leqq a \leqq 4$ のとき

$$I=\int_0^{\sqrt{a}}\{-f(x)\}\,dx+\int_{\sqrt{a}}^2 f(x)\,dx=F(2)+F(0)-2F(\sqrt{a})=\frac{8}{3}-2a+\frac{4}{3}a\sqrt{a}$$

であり，

$$g(a)=-a^2+2a+6\left(\frac{8}{3}-2a+\frac{4}{3}a\sqrt{a}\right)=-a^2+8a\sqrt{a}-10a+16$$

となる．

ここで，$t=\sqrt{a}$ とおくと，

$$g(a)=-t^4+8t^3-10t^2+16$$

であり，この右辺を $h(t)$ とおき，$0 \leqq t \leqq 2$ における $h(t)$ の増減を調べる．

$$h'(t)=-4t^3+24t^2-20t=-4t(t-1)(t-5)$$

であるから，増減は右表のようになる．

t	0	$\cdots$	1	$\cdots$	2
$h'(t)$		$-$	0	$+$	
$h(t)$	16	↘	13	↗	24

したがって，$g(a)$ は，

$0 \leqq a \leqq 1$ において減少，$1 \leqq a \leqq 4$ において増加

であり，極小値は $g(1)=h(1)=13$ である．

(iii) $4 \leqq a$ のとき

(ｉ)の過程より，

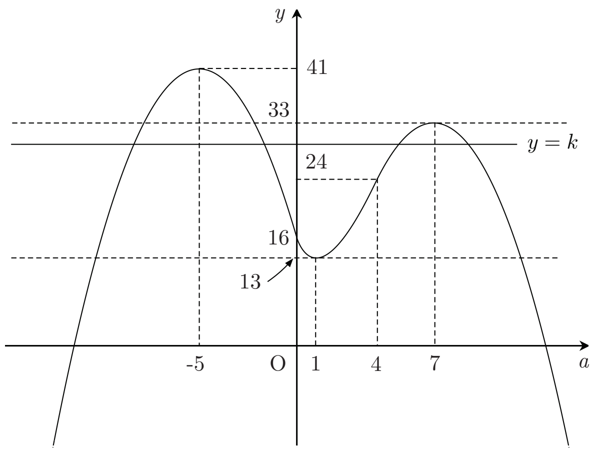
$$I=\int_0^2\{-f(x)\}\,dx=-\int_0^2 f(x)\,dx=2a-\frac{8}{3}$$

であり，

$$g(a)=-a^2+2a+6\left(2a-\frac{8}{3}\right)=-a^2+14a-16=-(a-7)^2+33$$

となる．

（ i ），（ii），（iii）より，$y=g(a)$ の概形は右図のようになる．



以上，（＊）より，求める実数 k の範囲は，

$$13<k<33$$

である．

$\boxed{4}$

$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=(1-t)\overrightarrow{\mathrm{OA}}+t\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ とおく．

$t=\dfrac{1}{5}$ のときのQの位置をE，$t=\dfrac{3}{5}$ のときのQの位置をFとおくと，

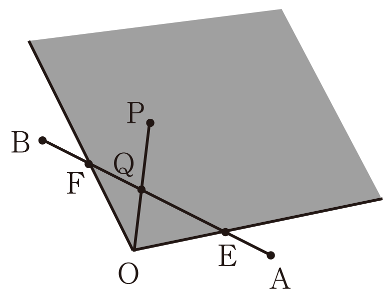
$$\overrightarrow{\mathrm{OE}}=\frac{4}{5}\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\frac{1}{5}\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\frac{4}{5}(0,\ 3,\ -5)+\frac{1}{5}(5,\ -2,\ 10)=(1,\ 2,\ -2)$$

$$\overrightarrow{\mathrm{OF}}=\frac{2}{5}\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\frac{3}{5}\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\frac{2}{5}(0,\ 3,\ -5)+\frac{3}{5}(5,\ -2,\ 10)=(3,\ 0,\ 4)$$

であり，t が $\dfrac{1}{5}\leqq t\leqq\dfrac{3}{5}$ の範囲を動くとき，Qは線分EF上を動く．

$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=s\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ であり，$s=0$ のとき P＝O，$s>0$ のとき $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ はOを中心に $\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ を s 倍に相似拡大したものである．

よって，s が $s\geqq 0$ を満たして動くとき，Pの存在範囲 D は，半直線OE，OFを境界とする図の網目部分となる(境界を含む)．



円 C は2つの半直線OE，OFに接するから，その中心Kは∠EOFの2等分線 l 上にある．

l とEFの交点をGとする．$\left|\overrightarrow{\mathrm{OE}}\right|=3$，$\left|\overrightarrow{\mathrm{OF}}\right|=5$ より，

$$\mathrm{EG}:\mathrm{FG}=3:5$$

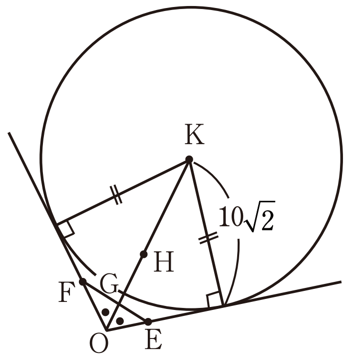
であるから，

$$\overrightarrow{\mathrm{OG}}=\frac{5\overrightarrow{\mathrm{OE}}+3\overrightarrow{\mathrm{OF}}}{3+5}=\frac{1}{4}(7,\ 5,\ 1)$$

となる．これより，H(7，5，1)は l 上にあり，

$$\mathrm{OH}=\sqrt{7^2+5^2+1^2}=5\sqrt{3}\quad\cdots①$$

である．



また，∠EOH＝∠FOH＝θ とおくと，

$$\cos\theta=\frac{\overrightarrow{\mathrm{OE}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OH}}}{\left|\overrightarrow{\mathrm{OE}}\right|\left|\overrightarrow{\mathrm{OH}}\right|}=\frac{15}{3\cdot 5\sqrt{3}}=\frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\sin\theta=\sqrt{1-\cos^2\theta}=\sqrt{\frac{2}{3}}$$

であるから，

$$\mathrm{OK}=\frac{10\sqrt{2}}{\sin\theta}=10\sqrt{3}\cdots②$$

となる．

$\overrightarrow{\mathrm{OK}}$ は $\overrightarrow{\mathrm{OH}}$ と同じ向きであるから，①，②より，

$$\overrightarrow{\mathrm{OK}}=2\overrightarrow{\mathrm{OH}}=(14,\ 10,\ 2)$$

である．

以上から，C の中心の座標は(14，10，2)である．

$\boxed{5}$

(1) P_n $(n=1, 2, \cdots)$の定め方から,

P_nは，nが奇数のとき A，C，D のいずれか，nが偶数のとき B，E のいずれか …(＊)

である.

P_nが A である確率a_n を求める.

(＊)より，nが偶数のとき$a_n=0$.

nが奇数のとき，mを正の整数として$n=2m-1$とおく.

P_{2m+1}が A となるのは,

(i) P_{2m-1}が A であり，このときP_{2m}は B であり，次に線分 AB を選ぶ.

(ii) P_{2m-1}が C であり，線分 CB を選び（このときP_{2m}は B)，次に線分 BA を選ぶ.

(iii) P_{2m-1}が D であり，線分 DB を選び（このときP_{2m}は B)，次に線分 BA を選ぶ.

のいずれかの場合である．P_{2m-1}が C，D である確率をそれぞれc_{2m-1}，d_{2m-1}とおくと，(＊)より，$a_{2m-1}+c_{2m-1}+d_{2m-1}=1$ であることに注意して,

$$\begin{aligned}a_{2m+1}&=a_{2m-1}\cdot 1\cdot\frac{1}{3}+c_{2m-1}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}+d_{2m-1}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\\&=\frac{1}{3}a_{2m-1}+\frac{1}{6}(c_{2m-1}+d_{2m-1})\\&=\frac{1}{3}a_{2m-1}+\frac{1}{6}(1-a_{2m-1})\end{aligned}$$

$$\therefore\quad a_{2m+1}=\frac{1}{6}a_{2m-1}+\frac{1}{6}\qquad\therefore\quad a_{2m+1}-\frac{1}{5}=\frac{1}{6}\left(a_{2m-1}-\frac{1}{5}\right)$$

$\left\{a_{2m-1}-\frac{1}{5}\right\}$ は公比$\frac{1}{6}$の等比数列であり，$a_1=1$であるから,

$$a_{2m-1}-\frac{1}{5}=\left(a_1-\frac{1}{5}\right)\left(\frac{1}{6}\right)^{m-1}=\frac{4}{5}\left(\frac{1}{6}\right)^{m-1}$$

$$\therefore\quad a_{2m-1}=\frac{1}{5}+\frac{4}{5}\left(\frac{1}{6}\right)^{m-1}$$

$$\therefore\quad a_n=\frac{1}{5}+\frac{4}{5}\left(\frac{1}{6}\right)^{\frac{n-1}{2}}$$

である.

次に，P_nが B である確率b_n を求める.

(＊)より，nが奇数のとき$b_n=0$.

nが偶数のとき，mを正の整数として$n=2m$とおく.

P_{2m}が B となるのは,

(iv) P_{2m-1}が A である.

(v) P_{2m-1}が C であり，線分 CB を選ぶ.

(vi) P_{2m-1}が D であり，線分 DB を選ぶ.

のいずれかの場合であるから,

$$\begin{aligned}b_{2m}&=a_{2m-1}\cdot 1+c_{2m-1}\cdot\frac{1}{2}+d_{2m-1}\cdot\frac{1}{2}\\&=a_{2m-1}+\frac{1}{2}(c_{2m-1}+d_{2m-1})\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= a_{2m-1} + \frac{1}{2}(1 - a_{2m-1}) \\
&= \frac{1}{2}a_{2m-1} + \frac{1}{2} \\
&= \frac{1}{2}\left\{\frac{1}{5} + \frac{4}{5}\left(\frac{1}{6}\right)^{m-1}\right\} + \frac{1}{2} \\
&= \frac{3}{5} + \frac{2}{5}\left(\frac{1}{6}\right)^{m-1}
\end{aligned}
$$

$$
\therefore\quad b_n = \frac{3}{5} + \frac{2}{5}\left(\frac{1}{6}\right)^{\frac{n-2}{2}}
$$

である．

以上から，求める確率は，

$$
p_n = a_n + b_n = \begin{cases} \dfrac{1}{5} + \dfrac{4}{5}\left(\dfrac{1}{6}\right)^{\frac{n-1}{2}} & (n\text{が奇数のとき}) \\ \dfrac{3}{5} + \dfrac{2}{5}\left(\dfrac{1}{6}\right)^{\frac{n-2}{2}} & (n\text{が偶数のとき}) \end{cases}
$$

である．

(2)　事象 X，Y を次のように定める．

X：P_nが A または B である

Y：P_1，P_2，…，P_n がいずれも E とならない

（ア）　nが奇数のとき

$n=1$ のとき，$P(X\cap Y) = a_1 = 1$

nが 3 以上の奇数のとき，$n=2m-1\,(m \geqq 2)$とおくと，$X\cap Y$ が起こるのは，

$\mathrm{P}_1=\mathrm{A}$，$\mathrm{P}_2=\mathrm{B}$，続く 2 回の試行ごとに，線分 BA，AB，または線分 BC，CB，または線分 BD，DB を選ぶことを $m-2$ 回繰り返し，最後に線分 BA を選ぶ．

ときであるから，その確率は，

$$
\begin{aligned}
P(X\cap Y) &= 1\cdot\left(\frac{1}{3}\cdot 1 + \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\right)^{m-2}\cdot\frac{1}{3} \\
&= \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^{m-2} = \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{n-3}{2}}
\end{aligned}
$$

（イ）　nが偶数のとき

$n=2m\,(m \geqq 1)$とおくと，$X\cap Y$ が起こるのは，

$\mathrm{P}_1=\mathrm{A}$，$\mathrm{P}_2=\mathrm{B}$，続く 2 回の試行ごとに，線分 BA，AB，または線分 BC，CB，または線分 BD，DB を選ぶことを $m-1$ 回繰り返す．

ときであり，(1)の(iii)から，その確率は，

$$
P(X\cap Y) = 1\cdot\left(\frac{1}{3}\cdot 1 + \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\right)^{m-1} = \left(\frac{2}{3}\right)^{m-1} = \left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{n-2}{2}}
$$

これは $n=2$ のときも正しい．

以上から，求める条件付き確率は，

$$q_n=\frac{P(X\cap Y)}{P(X)}$$

$$=\begin{cases} 1 & (n=1 \text{ のとき}) \\ \dfrac{\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{2}{3}\right)^{\frac{n-3}{2}}}{\dfrac{1}{5}+\dfrac{4}{5}\left(\dfrac{1}{6}\right)^{\frac{n-1}{2}}}=\dfrac{10\cdot 2^{n-3}}{6^{\frac{n-1}{2}}+4} & (n \text{ が } 3 \text{ 以上の奇数のとき}) \\ \dfrac{\left(\dfrac{2}{3}\right)^{\frac{n-2}{2}}}{\dfrac{3}{5}+\dfrac{2}{5}\left(\dfrac{1}{6}\right)^{\frac{n-2}{2}}}=\dfrac{5\cdot 2^{n-2}}{3\cdot 6^{\frac{n-2}{2}}+2} & (n \text{ が偶数のとき}) \end{cases}$$

である.