

2025年度 北海道大学 前期 数学 文系

1

(1) $f(x) = x^3 - 6x^2 - 15x + 30$ のとき

$$f'(x) = 3x^2 - 12x - 15 = 3(x+1)(x-5)$$

であるから, $f(x)$ の増減は下表のようになる.

x	...	-1	...	5	...
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	↗	38	↘	-70	↗

したがって, $f(x)$ は,

$x = -1$ のとき 極大値 38, $x = 5$ のとき 極小値 -70(答)

をとる.

(2) C 上の点 $(t, t^3 - 6t^2 - 15t + 30)$ における C の接線の方程式は,

$$\begin{aligned} y &= (3t^2 - 12t - 15)(x - t) + t^3 - 6t^2 - 15t + 30 \\ \therefore y &= (3t^2 - 12t - 15)x - 2t^3 + 6t^2 + 30 \end{aligned} \quad \text{..... ①}$$

である. 直線①が点 $(-3, -6)$ を通るのは,

$$\begin{aligned} -6 &= (3t^2 - 12t - 15) \cdot (-3) - 2t^3 + 6t^2 + 30 \\ \therefore 2t^3 + 3t^2 - 36t - 81 &= 0 \\ \therefore (t+3)^2(2t-9) &= 0 \\ \therefore t &= -3, \frac{9}{2} \end{aligned}$$

のときである. これらを①に代入することにより, 求める直線の方程式は,

$$y = 48x + 138, y = -\frac{33}{4}x - \frac{123}{4} \quad \text{.....(答)}$$

である.

2

$2 \leq a < b < c \leq 6$ を満たすような整数の組 (a, b, c) は,

$$(a, b, c) = (2, 3, 4), (2, 3, 5), (2, 3, 6), (2, 4, 5), (2, 4, 6), \\ (2, 5, 6), (3, 4, 5), (3, 4, 6), (3, 5, 6), (4, 5, 6)$$

である.

(1) 右表より, $a + b > c$ を満たすような (a, b, c) は,

$$(a, b, c) = (2, 3, 4), (2, 4, 5), (2, 5, 6), (3, 4, 5), \\ (3, 4, 6), (3, 5, 6), (4, 5, 6)$$

……(答)

である.

(a, b, c)	$a + b$
(2, 3, 4)	5
(2, 3, 5)	5
(2, 3, 6)	5
(2, 4, 5)	6
(2, 4, 6)	6
(2, 5, 6)	7
(3, 4, 5)	7
(3, 4, 6)	7
(3, 5, 6)	8
(4, 5, 6)	9

(2) 右表より, $a^2 + b^2 \geq c^2$ を満たすような (a, b, c) は,

$$(a, b, c) = (3, 4, 5), (4, 5, 6)$$

……(答)

である.

(3) 余弦定理より,

$$\cos \angle ACB = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$$

である. よって,

$$(a, b, c) = (3, 4, 5) \text{ のとき } \cos \angle ACB = 0$$

……(答)

$$(a, b, c) = (4, 5, 6) \text{ のとき } \cos \angle ACB = \frac{1}{8}$$

……(答)

である.

(a, b, c)	$a^2 + b^2$	c^2
(2, 3, 4)	13	16
(2, 3, 5)	13	25
(2, 3, 6)	13	36
(2, 4, 5)	20	25
(2, 4, 6)	20	36
(2, 5, 6)	29	36
(3, 4, 5)	25	25
(3, 4, 6)	25	36
(3, 5, 6)	34	36
(4, 5, 6)	41	36

$$\boxed{3} \quad (n+1)a_{n+2} - (2n+3)a_{n+1} + (n+2)a_n = 0 \quad \dots\dots\dots \textcircled{1}$$

(1) ①より,

$$\begin{aligned} & (n+1)a_{n+2} - \{(n+1) + (n+2)\}a_{n+1} + (n+2)a_n \\ \therefore & (n+1)(a_{n+2} - a_{n+1}) = (n+2)(a_{n+1} - a_n) \end{aligned}$$

である. $b_n = a_{n+1} - a_n$ より $b_{n+1} = a_{n+2} - a_{n+1}$ であるから,

$$(n+1)b_{n+1} = (n+2)b_n \quad \therefore b_{n+1} = \frac{n+2}{n+1}b_n \quad \dots\dots\dots \textcircled{2}$$

が成り立つ.

(証明おわり)

(2) $b_1 = a_2 - a_1 = 2$ であり, ②より,

$$\frac{b_{n+1}}{n+2} = \frac{b_n}{n+1}$$

である. よって, 数列 $\left\{ \frac{b_n}{n+1} \right\}$ は定数数列であるから,

$$\frac{b_n}{n+1} = \frac{b_1}{2} = 1 \quad \therefore b_n = n+1$$

である. これより, $n \geq 2$ のとき,

$$\begin{aligned} a_n &= a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} b_k = 1 + \sum_{k=1}^{n-1} (k+1) \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} (k+1) = \sum_{k=1}^n k = \frac{1}{2}n(n+1) \end{aligned} \quad \dots\dots\dots \textcircled{3}$$

であり, $a_1 = 1$ より $n = 1$ のときも③は成り立つ. したがって,

$$a_n = \frac{1}{2}n(n+1) \quad \dots\dots\dots \text{(答)}$$

である.

(3) (2) より,

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{225} \frac{1}{a_n} &= \sum_{n=1}^{225} \frac{2}{n(n+1)} = 2 \sum_{n=1}^{225} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) \\ &= 2 \left(1 - \frac{1}{226} \right) = \frac{225}{113} \end{aligned} \quad \dots\dots\dots \text{(答)}$$

である.

$$\boxed{4} \quad f(nx) = \{f(x)\}^n \quad \dots\dots\dots \textcircled{1}$$

(1) $f(1) = 2$ であるから, $x = 1$ を $\textcircled{1}$ に代入すると,

$$f(n) = 2^n \quad \dots\dots\dots \textcircled{2}$$

となる. n に対して $f(n)$ は単調に増加し, $f(6) = 64$, $f(7) = 128$ であるから, $f(n) \leq 100$ となるような最大の整数 n は

$$6 \quad \dots\dots\dots \text{(答)}$$

である.

(2) $\textcircled{1}$ において, x を $\frac{x}{2}$ とし, $n = 2$ とすると,

$$f(x) = \left\{ f\left(\frac{x}{2}\right) \right\}^2$$

となる. $f(x)$ のとりうる値は 0 でない実数であるから $\left\{ f\left(\frac{x}{2}\right) \right\}^2 > 0$ である. よって, すべての実数 x について $f(x) > 0$ である. (証明おわり)

(3) $x = 0.25$, $n = 4$ を $\textcircled{1}$ に代入すると,

$$f(1) = \{f(0.25)\}^4$$

となる. $f(1) = 2$ であるから $\{f(0.25)\}^4 = 2$ であり, これと (2) より,

$$f(0.25) = 2^{\frac{1}{4}} \quad \dots\dots\dots \text{(答)}$$

である.

(4) a が有理数のとき,

$$a = \frac{p}{q} \quad (p, q \text{ は互いに素な整数で, } q > 0)$$

と表せる. $x = a = \frac{p}{q}$, $n = q$ を $\textcircled{1}$ に代入すると,

$$f(p) = \{f(a)\}^q$$

となる. これと $\textcircled{2}$ より,

$$2^p = \{f(a)\}^q$$

であり, (2) も用いると,

$$f(a) = 2^{\frac{p}{q}} \quad \therefore f(a) = 2^a \quad \dots\dots\dots \text{(答)}$$

である.