2025年度 北海道大学 前期 数学 理系

$\boxed{1}$

(1)　数列 $\{a_n\}$ の一般項は,

$$a_n = \alpha r^{n-1}$$

である．b_n の底を α に変換すると,

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{\log_\alpha a_{n+1}}{\log_\alpha a_n} \\ &= \frac{\log_\alpha \alpha r^n}{\log_\alpha \alpha r^{n-1}} \\ &= \frac{\log_\alpha \alpha + \log_\alpha r^n}{\log_\alpha \alpha + \log_\alpha r^{n-1}} \\ &= \frac{1 + n\log_\alpha r}{1 + (n-1)\log_\alpha r} \end{aligned}$$ ……(答)

である.

(2)　等式

$$b_n = \frac{n+2}{n+1}$$

がすべての自然数 n について成り立つために，$b_1 = \dfrac{3}{2}$ が必要であるから．(1) の結果を用いると,

$$\frac{3}{2} = 1 + \log_\alpha r \qquad \therefore \quad \log_\alpha r = \frac{1}{2} \qquad \therefore \quad r = \sqrt{\alpha}$$

が必要である．逆に，このとき確かに,

$$b_n = \frac{1 + n \cdot \dfrac{1}{2}}{1 + (n-1) \cdot \dfrac{1}{2}} = \frac{n+2}{n+1}$$

となり十分である.

よって, すべての自然数 n について成り立つための r と α の必要十分条件は,

$$r = \sqrt{\alpha}$$ ……(答)

である.

(3)　(2) の条件が成り立つとき,

$$a_n = \alpha \cdot (\sqrt{\alpha})^{n-1} = \alpha^{\frac{n+1}{2}}$$

である．これより,

$$a_1a_2 = \alpha^1 \cdot \alpha^{\frac{3}{2}} = \alpha^{\frac{5}{2}}, \quad a_1a_2a_3 = a_1a_2\alpha^2 = \alpha^{\frac{9}{2}}, \quad a_1a_2a_3a_4 = a_1a_2a_3\alpha^{\frac{5}{2}} = \alpha^7$$

となる．これらの整数部分がそれぞれ 2 桁，3 桁，4 桁であるから，求める α の範囲は,

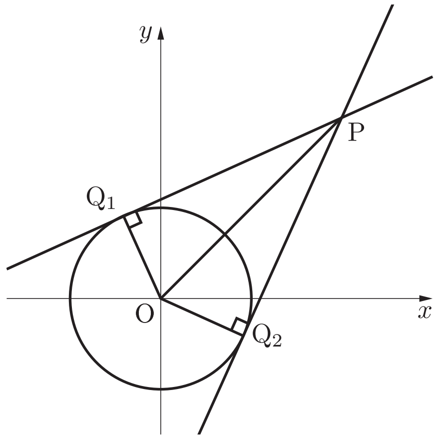
$$\begin{cases} 10 \leqq \alpha^{\frac{5}{2}} < 100 \\ 100 \leqq \alpha^{\frac{9}{2}} < 1000 \\ 1000 \leqq \alpha^7 < 10000 \end{cases} \qquad \therefore \quad \begin{cases} 10^{\frac{2}{5}} \leqq \alpha < 10^{\frac{4}{5}} \\ 10^{\frac{4}{9}} \leqq \alpha < 10^{\frac{2}{3}} \\ 10^{\frac{3}{7}} \leqq \alpha < 10^{\frac{4}{7}} \end{cases}$$

$$\therefore \quad 10^{\frac{4}{9}} \leqq \alpha < 10^{\frac{4}{7}}$$ ……(答)

である.

$\boxed{2}$

(1)　$\triangle \mathrm{OPQ}_1$ は $\angle \mathrm{OQ}_1\mathrm{P}=90^\circ$ の直角三角形であり，



$$\mathrm{OP}=\sqrt{p^2+q^2},\ \mathrm{OQ}_1=1$$

であるから，三平方の定理より

$$\mathrm{PQ}_1=\sqrt{\mathrm{OP}^2-\mathrm{OQ}_1^2}=\sqrt{p^2+q^2-1}$$

である．したがって，

$$\triangle \mathrm{OPQ}_1=\frac{1}{2}\cdot 1\cdot\sqrt{p^2+q^2+1}=\frac{1}{2}\sqrt{p^2+q^2-1}$$

であり，$\triangle \mathrm{OPQ}_1\equiv\triangle \mathrm{OPQ}_2$ であるから，

$$S=\triangle \mathrm{OPQ}_1+\triangle \mathrm{OPQ}_2=\sqrt{p^2+q^2-1} \qquad \cdots\cdots(答)$$

である．

(2)　点 P が C_2 上を動くとき，

$$\frac{p^2}{2}+\frac{q^2}{3}=1 \quad すなわち \quad q^2=3-\frac{3p^2}{2} \qquad \cdots\cdots①$$

であるから，

$$p^2+q^2-1=p^2+3-\frac{3p^2}{2}-1=2-\frac{p^2}{2} \qquad \cdots\cdots②$$

となる．$p^2\geqq 0,\ q^2\geqq 0$, ① より，

$$p^2\geqq 0,\ 3-\frac{3p^2}{2}\geqq 0 \qquad \therefore\quad 0\leqq p^2\leqq 2$$

であるから，②のとりうる値の範囲は，

$$2-\frac{2}{2}\leqq p^2+q^2-1\leqq 2-\frac{0}{2} \quad すなわち \quad 1\leqq p^2+q^2-1\leqq 2$$

となる．したがって，S の

$$最大値\sqrt{2},\ 最小値\ 1 \qquad \cdots\cdots(答)$$

である．

(別解)　点 P が C_2 上を動くとき，実数 θ を用いて

$$\begin{cases} p=\sqrt{2}\cos\theta \\ q=\sqrt{3}\sin\theta \end{cases}$$

とおける．これより，

$$p^2+q^2-1=2\cos^2\theta+3\sin^2\theta-1=1+\sin^2\theta$$

である．θ は全ての実数をとりうるので，S は，

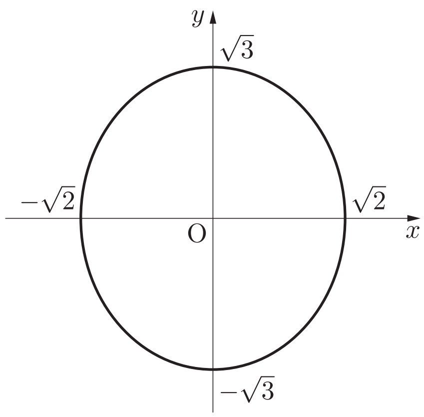
$$\begin{cases} \sin^2\theta=1 \text{ のとき}\quad 最大値\sqrt{1+1}=\sqrt{2} \\ \sin^2\theta=0 \text{ のとき}\quad 最小値\sqrt{1+0}=1 \end{cases} \qquad \cdots\cdots(答)$$

をとる．

(注)　(1) の結果から，S の値は OP^2-1 の値により決まるとわかる．したがって，(2) では，

- 点 P が楕円 C_2 の長軸の端点にあるとき S が最大
- 点 P が楕円 C_2 の短軸の端点にあるとき S が最小

として解くこともできる．



$\boxed{3}$

(1)
$$
\begin{aligned}
I(a,n) &= \int_0^{2\pi} \left(\frac{1}{a}e^{ax}\right)' \sin(nx)dx \\
&= \left[\frac{1}{a}e^{ax}\sin(nx)\right]_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi} \frac{1}{a}e^{ax}\cdot n\cos(nx)dx \\
&= -\frac{n}{a}\int_0^{2\pi} \left(\frac{1}{a}e^{ax}\right)' \cos(nx)dx \\
&= -\frac{n}{a}\left[\frac{1}{a}e^{ax}\cos(nx)\right]_0^{2\pi} + \frac{n}{a^2}\int_0^{2\pi} e^{ax}(-n)\sin(nx)dx \\
&= -\frac{n}{a^2}(e^{2a\pi}-1) - \frac{n^2}{a^2}I(a,n)
\end{aligned}
$$

であるから,

$$(a^2+n^2)I(a,n) = n(1-e^{2a\pi})$$

すなわち,

$$I(a,n) = \frac{n\left(1-e^{2a\pi}\right)}{a^2+n^2} \qquad \cdots\cdots(答)$$

である.

(別解)

$$\{e^{ax}\sin(nx)\}' = ae^{ax}\sin(nx) + e^{ax}\cdot n\cos(nx) \qquad \cdots\cdots①$$
$$\{e^{ax}\cos(nx)\}' = ae^{ax}\cos(nx) + e^{ax}\cdot(-n)\sin(nx) \qquad \cdots\cdots②$$

であり, ①$\times a -$ ② $\times n$ を計算すると,

$$(e^{ax}\{a\sin(nx)-n\cos(nx)\})' = \left(a^2+n^2\right)e^{ax}\sin(nx)$$
$$\therefore \quad \left(\frac{1}{a^2+n^2}e^{ax}\{a\sin(nx)-n\cos(nx)\}\right)' = e^{ax}\sin(nx)$$

である. よって,

$$I(a,n) = \left[\frac{1}{a^2+n^2}e^{ax}\{a\sin(nx)-n\cos(nx)\}\right]_0^{2\pi} = \frac{n\left(1-e^{2a\pi}\right)}{a^2+n^2} \qquad \cdots\cdots(答)$$

である.

(2)
$$I\left(a_n,n\right) = \frac{n\left(1-e^{\log n}\right)}{\left(\frac{\log n}{2\pi}\right)^2+n^2} = \frac{n\left(1-n\right)}{\left(\frac{\log n}{2\pi}\right)^2+n^2}$$

である. 分母分子を n^2 で割ると,

$$I\left(a_n,n\right) = \frac{1\cdot\left(\frac{1}{n}-1\right)}{\frac{1}{4\pi^2}\left(\frac{\log n}{n}\right)^2+1}$$

となる．$\lim_{n\to\infty}\dfrac{\log n}{n}=0$ に注意して，

$$\lim_{n\to\infty} I\left(a_n, n\right)=\frac{1\cdot(0-1)}{\dfrac{1}{4\pi^2}\cdot 0^2+1}=-1 \qquad \cdots\cdots(答)$$

である．

$\boxed{4}$

(1)　与式の両辺は 0 以上であるから，与式の両辺を 2 乗した

$$a^2 |z-1|^2 = |(a-2)z+a|^2$$

と同値である．これを変形すると，

$$\begin{aligned} &a^2(z-1)(\bar{z}-1) = \{(a-2)z+a\}\{(a-2)\bar{z}+a\} \\ \therefore\ &a^2(z\bar{z}-z-\bar{z}+1) = (a-2)^2 z\bar{z} + a(a-2)z + a(a-2)\bar{z} + a^2 \\ \therefore\ &4(a-1)z\bar{z} - 2a(a-1)z - 2a(a-1)\bar{z} = 0 \end{aligned}$$

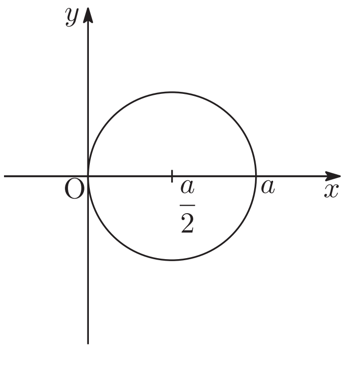
となる．$a \neq 1$ なので，両辺を $4(a-1)$ で割ると，

$$\begin{aligned} &z\bar{z} - \frac{a}{2}z - \frac{a}{2}\bar{z} = 0 \\ \therefore\ &\left(z-\frac{a}{2}\right)\left(\bar{z}-\frac{a}{2}\right) - \frac{a^2}{4} = 0 \\ \therefore\ &\left|z-\frac{a}{2}\right|^2 = \frac{a^2}{4} \end{aligned}$$

となり，$\left|z-\frac{a}{2}\right| \geqq 0$ かつ $\frac{a}{2} \geqq 0$ であるから，

$$\left|z-\frac{a}{2}\right| = \frac{a}{2}$$

となる．よって，与式を表す図形は中心 $\frac{a}{2}$，半径 $\frac{a}{2}$ の円であり，以下の図のようになる．



(2)

$$|z|^2 = 6-a \qquad \cdots\cdots ①$$
$$a|z-1| = |(a-2)z+a| \qquad \cdots\cdots ②$$

とし，

①かつ②となる複素数 z が存在する　$\cdots\cdots(*)$

ような a の範囲を求める．

(i) $6-a<0$, すなわち, $a>6$ のとき, ②を満たす複素数 z が存在しないので, $(*)$ が成り立つようなことはない.

(ii) $6-a=0$, すなわち, $a=6$ のとき, ①は $z=0$ であり, ②は (1) より, 中心 3, 半径 3 の円なので $z=0$ を含む. したがって, $a=6$ のとき成り立つ.

(iii) $6-a>0$ かつ $a\neq 1$, すなわち, $0<a<6$ かつ $a\neq 1$ のとき, ①は中心 0, 半径 $\sqrt{6-a}$ の円を表し, ②は (1) より, 中心 $\dfrac{a}{2}$, 半径 $\dfrac{a}{2}$ の円を表す. $(*)$ が成り立つ条件はこの 2 円が共有点をもつこと, つまり, $0<a<6$ かつ $a\neq 1$ のもとで

$$\sqrt{6-a}\leqq a$$

と同値であり, この条件は両辺は 0 以上なので 2 乗した

$$6-a\leqq a^2$$

と同値である. これを解くと,

$$a\leqq -3 \quad \text{または} \quad 2\leqq a$$

となる. $0<a<6$ かつ $a\neq 1$ と共通部分をとり,

$$2\leqq a<6$$

である.

(iv) $a=1$ のとき, ①は中心 0, 半径 $\sqrt{5}$ の円を表し, ②は $|z-1|=|z-1|$ となるから, 複素数平面全体を表す. したがって①かつ②となる z が存在するので, $(*)$ は $a=1$ のとき成り立つ.

(i) から (iv) より, 求める a の範囲は,

$$a=1 \quad \text{または} \quad 2\leqq a\leqq 6 \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

である.

$\boxed{5}$

(1) $$k < a < b < c \leqq k+n \quad \Leftrightarrow \quad k+1 \leqq a < b < c \leqq k+n$$

であるから，求める選び方の総数は，n 個の整数 $k+1,\, k+2,\, k+3, \cdots, k+n$ から異なる 3 個を取る組み合わせの総数と等しく，

$${}_n\mathrm{C}_3 = \frac{1}{6}n(n-1)(n-2) \qquad \cdots\cdots(答)$$

である．

(2) (1) で $k=n$ とすれば，$n+1 \leqq a < b < c \leqq 2n$ を満たす $a,\, b,\, c$ の組 $\cdots$ ① は ${}_n\mathrm{C}_3$ 通りであり，この $a,\, b,\, c$ の組はすべて

$$a+b \geqq (n+1)+(n+2) = 2n+3 > 2n \geqq c$$

より，$a+b>c$ を満たす．

また，$(a,\, b,\, c) = (n,\, n+2,\, 2n)$ は①以外の $a+b>c$ を満たす $a,\, b,\, c$ の組である．

以上より，$L > {}_n\mathrm{C}_3$ が成り立つ． (証明終わり)

(注) ①以外の $a+b>c$ を満たす $a,\, b,\, c$ の組は，$(a,\, b,\, c) = (n,\, n+2,\, 2n)$ の他にもいろいろある．