2025年度 慶應義塾大学 理工学部 数学

1

【解答】

（ア）	（イ）	（ウ）	（エ）	（オ）	（カ）
$\dfrac{4\sqrt{3}}{3}+\dfrac{1}{3}i$	$\dfrac{4}{3}$	9	3275	$6t^7+8t^5+2t^3$	$\dfrac{7}{12}$

【解説】

(1)

$$\begin{aligned}|z+i|=2\left|z-\sqrt{3}\right| \quad &\Leftrightarrow \quad (z+i)(\overline{z}-i)=4\left(z-\sqrt{3}\right)\left(\overline{z}-\sqrt{3}\right)\\ &\Leftrightarrow \quad z\overline{z}-\frac{4\sqrt{3}-i}{3}z-\frac{4\sqrt{3}+i}{3}\overline{z}+\frac{11}{3}=0\\ &\Leftrightarrow \quad \left(z-\frac{4\sqrt{3}+i}{3}\right)\left(\overline{z}-\frac{4\sqrt{3}-i}{3}\right)=\frac{16}{9}\\ &\Leftrightarrow \quad \left|z-\frac{4\sqrt{3}+i}{3}\right|=\frac{4}{3}\end{aligned}$$

より，求める図形は，

中心 $\dfrac{4\sqrt{3}}{3}+\dfrac{1}{3}i$，半径 $\dfrac{4}{3}$ …（ア）（イ）

の円である．

（注）　2 点 $-i$ と $\sqrt{3}$ に関するアポロニウスの円である．このことから中心と半径を求めることもできる．

(2)　自然数の中で 6 または 8 または 9 で割り切れるものを小さい順に並べた数列を $\{b_m\}$（$m=1, 2, 3, \cdots$）とする．6, 8, 9 の最小公倍数は 72 であり，1 から 72 までの自然数の中で 6 または 8 または 9 で割り切れるものは次の 22 個である．

6, 8, 9, 12, 16, 18, 24, 27, 30, 32, 36, 40, 42, 45, 48, 54, 56, 60, 63, 64, 66, 72

よって，

$a_{30}=9$ …（ウ）

である．

次に，上の 22 個，すなわち $b_1 \sim b_{22}$ を用いれば，数列 $\{b_m\}$ の項は自然数 k を用いて，

$$b_{22(k-1)+l}=72(k-1)+b_l \quad (l=1, 2, \cdots, 22)$$

と表される．したがって $a_n=1000$ を満たす最大の n は，

$$b_{1001}-1=b_{22\cdot 45+11}-1$$
$$=72\cdot 45+b_{11}-1$$
$$=72\cdot 45+36-1$$
$$=3275 \qquad \cdots（エ）$$

である．

(3)　$g(x)=x^3+x$ より，$y=g^{-1}(x)$ とおくと，

$$x=g(y)=y^3+y$$

となり，このとき，

$$\frac{dx}{dy}=3y^2+1 \qquad \therefore \quad \frac{d}{dx}g^{-1}(x)=\frac{dy}{dx}=\frac{1}{3y^2+1}=\frac{1}{3\left\{g^{-1}(x)\right\}^2+1} \qquad \cdots①$$

ここで，$h(x)=t^2x^2-f\left(g^{-1}(x)\right)$ とおくと，①を用いて，

$$h'(x)=2t^2x-f'\left(g^{-1}(x)\right)\cdot\frac{d}{dx}g^{-1}(x)$$
$$=2t^2x-f'\left(g^{-1}(x)\right)\cdot\frac{1}{3\left\{g^{-1}(x)\right\}^2+1}$$

と表され，$g^{-1}\left(g(t)\right)=t$ に注意すると，

$$h'\left(g(t)\right)=2t^2g(t)-f'\left(g^{-1}\left(g(t)\right)\right)\cdot\frac{1}{3\left\{g^{-1}\left(g(t)\right)\right\}^2+1}$$
$$=2t^2\left(t^3+t\right)-f'(t)\cdot\frac{1}{3t^2+1}$$

となる．$h(x)$ が $x=t^3+t=g(t)$ で極値をとるとき，$h'\left(g(t)\right)=0$ が成り立つから，このとき $f'(t)$ は，

$$2t^2\left(t^3+t\right)-f'(t)\cdot\frac{1}{3t^2+1}=0$$

より，

$$f'(t)=2t^3\left(t^2+1\right)\left(3t^2+1\right)$$
$$=6t^7+8t^5+2t^3 \qquad \cdots②\cdots（オ）$$

となる．次に②が任意の実数 t に対して成り立つとき，

$$f(t)=\int f'(t)\,dt=\frac{3}{4}t^8+\frac{4}{3}t^6+\frac{1}{2}t^4+C$$ （C は積分定数）

であり，$f(0)=-2$ より，

$$C=-2$$

と定まるから，

$$f(t)=\frac{3}{4}t^8+\frac{4}{3}t^6+\frac{1}{2}t^4-2$$

$$\therefore \quad f(1)=\frac{3}{4}+\frac{4}{3}+\frac{1}{2}-2=\frac{7}{12} \qquad \cdots（カ）$$

2

【解答】

（キ）	（ク）	（ケ）	（コ）	（サ）
$-\dfrac{1}{9}x+\dfrac{10}{9}$	$\left(7,\dfrac{1}{3}\right)$	$\left(\dfrac{19}{4},\dfrac{4}{3}\right)$	$\dfrac{4t+49}{10}$	$\dfrac{7\sqrt{6}}{6}$

【(1)の記述解答とその他の問題の解説】

(1)　$f(x)=\dfrac{1}{x-4}$ とおくと，$f'(x)=-\dfrac{1}{(x-4)^2}$ であるから，曲線 C 上の点 $\left(s+4,\dfrac{1}{s}\right)$（ただし $s+4>4$ より $s>0$ ）における接線の方程式は，

$$y=-\frac{1}{s^2}\{x-(s+4)\}+\frac{1}{s}$$

すなわち

$$y=-\frac{1}{s^2}x+\frac{2s+4}{s^2} \quad \cdots①$$

と表される．直線①が $\mathrm{Q}(1,-1)$ を通るとき，

$$-1=-\frac{1}{s^2}+\frac{2s+4}{s^2} \quad すなわち \quad s^2+2s+3=0$$

が成り立つが，これを満たす実数 s は存在しない．したがって，曲線 C の接線で Q を通るものは存在しない．　（証明終）

(2)　直線①が $\mathrm{P}(1,1)$ を通るとき，

$$1=-\frac{1}{s^2}+\frac{2s+4}{s^2} \quad すなわち \quad s^2-2s-3=0$$

が成り立つので，$s>0$ より $s=3$ である．したがって，①に $s=3$ を代入して，l の方程式は，

$$y=-\frac{1}{9}x+\frac{10}{9} \quad \cdots（キ）$$

である．また，このときの接点 A の座標は，

$$\left(7,\frac{1}{3}\right) \quad \cdots（ク）$$

である．次に，C 上の点 B の座標を $\left(b+4,\dfrac{1}{b}\right)$（ただし $b>0$ ）とおく．

$$\overrightarrow{\mathrm{PB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PA}}+\overrightarrow{\mathrm{PA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AQ}}+\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AQ}}=-\frac{2}{3} \quad \cdots②$$

について，

$$\overrightarrow{PB}\cdot\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{AQ}+\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AQ}=\overrightarrow{PB}\cdot\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}\cdot\overrightarrow{AQ}$$
$$=\overrightarrow{PB}\cdot\overrightarrow{PQ}$$

であり，

$$\overrightarrow{PB}=\left(b+3,\ \frac{1}{b}-1\right),\ \overrightarrow{PQ}=(0,\ -2)$$

であるから，

$$\overrightarrow{PB}\cdot\overrightarrow{PQ}=\left(b+3,\ \frac{1}{b}-1\right)\cdot(0,\ -2)=2-\frac{2}{b}$$

である．よって，Bが②を満たすとき，

$$2-\frac{2}{b}=-\frac{2}{3}\quad\text{より}\quad b=\frac{3}{4}$$

である．したがって，このときの点Bの座標は，

$$\left(\frac{19}{4},\ \frac{4}{3}\right)\qquad\cdots（ケ）$$

である．

(3)　Sは線分ARを$2:1$に内分する点であり，Tは線分BSを$3:2$に内分する点であるから，

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OT}&=\frac{1}{5}\left(2\overrightarrow{OB}+3\overrightarrow{OS}\right)\\&=\frac{2}{5}\overrightarrow{OB}+\frac{3}{5}\cdot\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{OA}+2\overrightarrow{OR}\right)\\&=\frac{1}{5}\overrightarrow{OA}+\frac{2}{5}\overrightarrow{OB}+\frac{2}{5}\overrightarrow{OR}\\&=\frac{1}{5}\left(7,\ \frac{1}{3}\right)+\frac{2}{5}\left(\frac{19}{4},\ \frac{4}{3}\right)+\frac{2}{5}\left(t+4,\ \frac{1}{t}\right)\\&=\left(\frac{4t+49}{10},\ \frac{3t+2}{5t}\right)\end{aligned}$$

である．よって，

$$u=\frac{4t+49}{10}\qquad\cdots（コ）$$

$$v=\frac{3t+2}{5t}$$

と表される．したがって，$t>0$に注意して，

$$\begin{aligned}uv&=\frac{4t+49}{10}\cdot\frac{3t+2}{5t}=\frac{1}{50}\left(12t+155+\frac{98}{t}\right)\\&\geqq\frac{1}{50}\left(2\sqrt{12t\cdot\frac{98}{t}}+155\right)\\&=\frac{1}{50}\left(2\cdot14\sqrt{6}+155\right)=\frac{155+28\sqrt{6}}{50}\end{aligned}$$

であり，等号が成立するのは

$$12t=\frac{98}{t}\quad \text{かつ}\quad t>0\qquad \text{より}\quad t=\frac{7\sqrt{6}}{6}$$

のときである．よって，uv の値は，

$$t=\frac{7\sqrt{6}}{6}\qquad\cdots\text{（サ）}$$

のとき最小となる．

3

【解答】

（シ）	（ス）	（セ）	（ソ）	（タ）	（チ）	（ツ）	（テ）
$\dfrac{5}{36}$	$\dfrac{1}{6}$	$\dfrac{1}{2}$	$\dfrac{1}{3}$	2	$\left(\dfrac{1}{2},\dfrac{5}{6}\right)$	$\left(-\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{6}\right)$	$\dfrac{5}{24}\left\{\left(\dfrac{5}{6}\right)^{n-1}-\left(\dfrac{1}{6}\right)^{n-1}\right\}$

【解説】

（以下では，1 または 3 の目が出たときは，P, Q ともに動かさないものとする）

(1)　1 個のサイコロを投げたとき，

事象 A ：1 または 3 の目が出る（P, Q ともに動かさない）

事象 B ：2 または 4 の目が出る（P のみ正の向きに 1 だけ動かす）

事象 C ：5 の目が出る（Q のみ正の向きに 1 だけ動かす）

事象 D ：6 の目が出る（P, Q ともに正の向きに 1 だけ動かす）

と定義する．2 回さいころを投げて P と Q の距離が 2 となるのは，B が 2 回連続して起きるか，C が 2 回連続して起きるときであり，これらは互いに排反である．したがって，

$$p_2=\left(\frac{2}{6}\right)^2+\left(\frac{1}{6}\right)^2=\frac{5}{36}\qquad\cdots（シ）$$

である．

(2)

P が Q よりも正の向きに 1 だけ進んでいる状態を状態 X

P と Q が同じ位置にある状態を状態 Y

Q が P よりも正の向きに 1 だけ進んでいる状態を状態 Z

と定義する．よって，1 回サイコロを投げたとき，

状態 X となるのは事象 B が起きるとき

状態 Y となるのは事象 A または D が起きるとき

状態 Z となるのは事象 C が起きるとき

であるから，$x_1=\dfrac{1}{3},\ y_1=\dfrac{1}{2},\ z_1=\dfrac{1}{6}$ である．

次に，$n+1$ 回さいころを投げて状態 Y となるのは，

- n 回さいころを投げて状態 X となり，かつ次に事象 C が起きる
- n 回さいころを投げて状態 Y となり，かつ次に事象 A または D が起きる
- n 回さいころを投げて状態 Z となり，かつ次に事象 B が起きる

のいずれかの場合であり，これらは互いに排反である．したがって

$$y_{n+1}=x_n\cdot\frac{1}{6}+y_n\cdot\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{6}\right)+z_n\cdot\frac{1}{3}$$

$$=\frac{1}{6}x_n+\frac{1}{2}y_n+\frac{1}{3}z_n \qquad \cdots①\cdots（ス）～（ソ）$$

という関係式が成り立つ．

また，$n+1$ 回さいころを投げて状態 X となるのは，

- n 回さいころを投げて状態 X となり，かつ次に事象 A または D が起きる
- n 回さいころを投げて状態 Y となり，かつ次に事象 B が起きる

のいずれかの場合であり，これらは互いに排反である．そして，$n+1$ 回さいころを投げて状態 Z となるのは，

- n 回さいころを投げて状態 Y となり，かつ次に事象 C が起きる
- n 回さいころを投げて状態 Z となり，かつ次に事象 A または D が起きる

のいずれかの場合であり，これらは互いに排反である．これらから，

$$x_{n+1}=\frac{1}{2}x_n+\frac{1}{3}y_n \qquad \cdots②$$

$$z_{n+1}=\qquad\frac{1}{6}y_n+\frac{1}{2}z_n \qquad \cdots③$$

が成り立つ．②．③より y_n を消去すると，

$$x_{n+1}-2z_{n+1}=\frac{1}{2}x_n+\frac{1}{3}y_n-2\left(\frac{1}{6}y_n+\frac{1}{2}z_n\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left(x_n-2z_n\right)$$

となり，数列 $\{x_n-2z_n\}$ は公比 $\frac{1}{2}$ の等比数列であり，$x_1-2z_1=\frac{1}{3}-2\cdot\frac{1}{6}=0$ である．したがって，すべての自然数 n に対し $x_n-2z_n=0$，すなわち，

$$x_n=2z_n \qquad \cdots（タ）$$

が成り立つ．

（注）　上の $x_n=2z_n$ の関係を用いると，y_{n+1} は例えば(3)の④式，すなわち

$$y_{n+1}=0\cdot x_n+\frac{1}{2}y_n+\frac{2}{3}z_n$$

のような形でも表されるため，（ス）～（ソ）の答は一意的には定まらない．

(3)　$x_n=2z_n$ を用いると，①は

$$y_{n+1}=\frac{1}{6}\cdot 2z_n+\frac{1}{2}y_n+\frac{1}{3}z_n=\frac{1}{2}y_n+\frac{2}{3}z_n \qquad \cdots④$$

となる．③，④より，

$$z_{n+1}+\alpha y_{n+1}=\frac{1}{6}y_n+\frac{1}{2}z_n+\alpha\left(\frac{1}{2}y_n+\frac{2}{3}z_n\right)$$

$$=\left(\frac{2}{3}\alpha+\frac{1}{2}\right)z_n+\left(\frac{1}{2}\alpha+\frac{1}{6}\right)y_n \qquad \cdots⑤$$

となり，右辺が$\beta(z_n+\alpha y_n)$の形で表されるとき，

$$\left(\frac{2}{3}\alpha+\frac{1}{2}\right):\left(\frac{1}{2}\alpha+\frac{1}{6}\right)=1:\alpha \qquad \cdots⑥$$

が成り立つ．⑥より，

$$\alpha\left(\frac{2}{3}\alpha+\frac{1}{2}\right)=\left(\frac{1}{2}\alpha+\frac{1}{6}\right) \quad すなわち \quad \alpha^2=\frac{1}{4}$$

であるから，

$$\alpha=\pm\frac{1}{2} \qquad \cdots⑦$$

である．$\alpha=\frac{1}{2}$を⑤に代入すると，

$$z_{n+1}+\frac{1}{2}y_{n+1}=\frac{5}{6}z_n+\frac{5}{12}y_n=\frac{5}{6}\left(z_n+\frac{1}{2}y_n\right) \qquad \cdots⑧$$

となる．また，$\alpha=-\frac{1}{2}$を⑤に代入すると，

$$z_{n+1}-\frac{1}{2}y_{n+1}=\frac{1}{6}z_n-\frac{1}{12}y_n=\frac{1}{6}\left(z_n-\frac{1}{2}y_n\right) \qquad \cdots⑨$$

となる．

以上より，求める定数の組(α,β)は，

$$(\alpha,\beta)=\left(\frac{1}{2},\frac{5}{6}\right),\ \left(-\frac{1}{2},\frac{1}{6}\right) \qquad \cdots（チ）（ツ）$$

の 2 組ある．

(4)　$n+1$回さいころを投げてPとQの距離が 2 となるのは，

- n回さいころを投げて状態Xとなり，かつ次に事象Bが起きる
- n回さいころを投げて状態Zとなり，かつ次に事象Cが起きる

のいずれかの場合であり，これらは互いに排反である．よって，(2)で示したことも用いて，

$$p_{n+1}=\frac{1}{3}x_n+\frac{1}{6}z_n=\frac{1}{3}\cdot 2z_n+\frac{1}{6}z_n=\frac{5}{6}z_n \qquad \cdots⑩$$

が成り立つ．

一方，⑧より

$$z_n+\frac{1}{2}y_n=\left(\frac{5}{6}\right)^{n-1}\cdot\left(z_1+\frac{1}{2}y_1\right)=\left(\frac{5}{6}\right)^{n-1}\cdot\left(\frac{1}{6}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^{n} \qquad \cdots⑪$$

であり，⑨より

$$z_n-\frac{1}{2}y_n=\left(\frac{1}{6}\right)^{n-1}\cdot\left(z_1-\frac{1}{2}y_1\right)=\left(\frac{1}{6}\right)^{n-1}\cdot\left(\frac{1}{6}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\right)=-\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{6}\right)^{n} \quad \cdots⑫$$

である．したがって，⑪，⑫より

$$2z_n=\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^{n}-\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{6}\right)^{n}$$

$$\therefore\quad z_n=\frac{1}{4}\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^{n}-\frac{1}{4}\cdot\left(\frac{1}{6}\right)^{n} \quad \cdots⑬$$

したがって，⑩，⑬より

$$p_{n+1}=\frac{5}{6}z_n=\frac{5}{24}\left\{\left(\frac{5}{6}\right)^{n}-\left(\frac{1}{6}\right)^{n}\right\}$$

となるので，$n\geqq 2$ のとき

$$p_n=\frac{5}{24}\left\{\left(\frac{5}{6}\right)^{n-1}-\left(\frac{1}{6}\right)^{n-1}\right\}$$

である．$p_1=0$ より，これは $n=1$ でも正しい．

以上より，すべての自然数 n に対し，

$$p_n=\frac{5}{24}\left\{\left(\frac{5}{6}\right)^{n-1}-\left(\frac{1}{6}\right)^{n-1}\right\} \quad \cdots（テ）$$

となる．

4

【解答】

（ト）	（ナ）	（ニ）
2	$\frac{\pi}{10}-\frac{1}{25}$	4

【(2)(5)の記述解答とその他の問題の解説】

(1)

$$\begin{aligned} I_n &= \int_1^n \left(\frac{1}{x}\right)^{\frac{3}{2}} dx \\ &= \int_1^n x^{-\frac{3}{2}} dx \\ &= \left[-2x^{-\frac{1}{2}}\right]_1^n \\ &= 2-\frac{2}{\sqrt{n}} \end{aligned}$$

であるから，

$$\lim_{n\to\infty} I_n = \lim_{n\to\infty}\left(2-\frac{2}{\sqrt{n}}\right) = 2 \qquad \cdots（ト）$$

である．

(2)　$y=\left(\frac{1}{x}\right)^{\frac{3}{2}}$ $(x>0)$ は減少関数であるから，2 以上の任意の自然数 k に対し，区間 $[k-1, k]$ で $\left(\frac{1}{k}\right)^{\frac{3}{2}} \leqq \left(\frac{1}{x}\right)^{\frac{3}{2}}$ である．よって，

$$\int_{k-1}^k \left(\frac{1}{k}\right)^{\frac{3}{2}} dx \leqq \int_{k-1}^k \left(\frac{1}{x}\right)^{\frac{3}{2}} dx$$

すなわち，

$$\left(\frac{1}{k}\right)^{\frac{3}{2}} \leqq \int_{k-1}^k \left(\frac{1}{x}\right)^{\frac{3}{2}} dx$$

が成り立つ．

したがって，n が 3 以上の自然数のとき，

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k}\right)^{\frac{3}{2}} = 1+\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{3}{2}} + \sum_{k=3}^n \left(\frac{1}{k}\right)^{\frac{3}{2}} \\ &\leqq 1+\frac{\sqrt{2}}{4}+\sum_{k=3}^n \int_{k-1}^k \left(\frac{1}{x}\right)^{\frac{3}{2}} dx \end{aligned}$$

$$=1+\frac{\sqrt{2}}{4}+\int_2^n\left(\frac{1}{x}\right)^{\frac{3}{2}}dx$$
$$=1+\frac{\sqrt{2}}{4}+\left[-2x^{-\frac{1}{2}}\right]_2^n$$
$$=1+\frac{\sqrt{2}}{4}-\frac{2}{\sqrt{n}}+\sqrt{2}$$
$$<1+\frac{5\sqrt{2}}{4}$$

より，不等式

$$S_n<1+\frac{5\sqrt{2}}{4} \qquad \cdots①$$

が成り立つ．また，①は$n=1,2$でも成り立つので，すべての自然数nに対して，

$$S_n<1+\frac{5\sqrt{2}}{4}$$

が成り立つ．（証明終）

(3)

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}x\cos 5x\,dx=\left[\frac{1}{5}x\sin 5x+\frac{1}{25}\cos 5x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$
$$=\frac{\pi}{10}-\frac{1}{25} \qquad \cdots（ナ）$$

である．

(4)　$t=kx$と置換すると，

$$\int_0^{2\pi}\left|\sin kx\right|dx=\int_0^{2k\pi}\left|\sin t\right|\cdot\frac{1}{k}dt$$
$$=\frac{1}{k}\cdot 2k\cdot\int_0^{\pi}\left|\sin t\right|dt \quad （\because\ \left|\sin t\right|\text{は周期}\pi\text{をもつ}）$$
$$=2\int_0^{\pi}\sin t\,dt$$
$$=2\left[-\cos t\right]_0^{\pi}$$
$$=4 \qquad \cdots②\cdots（ニ）$$

である．

(5)

$$a_k=\int_0^{2\pi}f(x)\cos kx\,dx=\left[f(x)\cdot\frac{1}{k}\sin kx\right]_0^{2\pi}-\int_0^{2\pi}f'(x)\cdot\frac{1}{k}\sin kx\,dx$$
$$=-\frac{1}{k}\int_0^{2\pi}f'(x)\sin kx\,dx$$

であるから，区間$[0,2\pi]$で$f'(x)\sin kx$が連続であることに注意し，②および$\left|f'(x)\right|\leqq M$を用いると，

$$
\begin{aligned}
|a_k| &= \left|-\frac{1}{k}\int_0^{2\pi} f'(x)\sin kx\,dx\right| = \frac{1}{k}\left|\int_0^{2\pi} f'(x)\sin kx\,dx\right| \\
&\leqq \frac{1}{k}\int_0^{2\pi}|f'(x)\sin kx|\,dx = \frac{1}{k}\int_0^{2\pi}|f'(x)||\sin kx|\,dx \\
&\leqq \frac{1}{k}\int_0^{2\pi} M|\sin kx|\,dx \\
&= \frac{4M}{k}
\end{aligned}
$$

が成り立つ．

したがって，①を用いて，

$$
\begin{aligned}
T_n &= \sum_{k=1}^{n}|a_k|^{\frac{3}{2}} \\
&\leqq \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{4M}{k}\right)^{\frac{3}{2}} = 8M^{\frac{3}{2}}\cdot\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}\right)^{\frac{3}{2}} \\
&< 8M^{\frac{3}{2}}\cdot\left(1+\frac{5\sqrt{2}}{4}\right) \\
&= \left(10\sqrt{2}+8\right)M^{\frac{3}{2}} \\
&< \left(10\cdot\frac{3}{2}+8\right)M^{\frac{3}{2}} = 23M^{\frac{3}{2}}
\end{aligned}
$$

が成り立つ．（証明終）

5

【解答】

（ヌ）	（ネ）	（ノ）	（ハ）	（ヒ）	（フ）
$\dfrac{1}{\sqrt{2}}$	$\dfrac{\sqrt{7}}{4}$	3	4	$\dfrac{1+\sqrt{2a^2-1}}{2}$	$2a+3m-1$

【解説】

(1)　x, y は

$$x>0,\ y>0 \qquad \cdots①$$

$$x^2+y^2=1 \qquad \cdots②$$

を満たす．このもとでは $\mathrm{AB}=y,\ \mathrm{BC}=x$ であるから， $\mathrm{AB}=\mathrm{BC}$ のとき，

$$x=y=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

すなわち，このときの x の値は，

$$x=\frac{1}{\sqrt{2}} \qquad \cdots（ヌ）$$

である．

次に，①，②のもとでは，

$\dfrac{k}{n}<\dfrac{1}{\sqrt{2}}$，すなわち， $k<\dfrac{1}{\sqrt{2}}n$ のとき $x<y$

$\dfrac{k}{n}>\dfrac{1}{\sqrt{2}}$，すなわち， $k>\dfrac{1}{\sqrt{2}}n$ のとき $x>y$

$\left(\dfrac{k}{n}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\text{となることはない}\right)$

であるから，

$$L_n(k)=\begin{cases}\dfrac{k}{n} & \left(1\leqq k<\dfrac{1}{\sqrt{2}}n\right)\\ \sqrt{1-\left(\dfrac{k}{n}\right)^2} & \left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}n<k\leqq n-1\right)\end{cases} \qquad \cdots③$$

と表される．

$n=4$ のとき， $\dfrac{1}{\sqrt{2}}n=2\sqrt{2}$ であり， $2<2\sqrt{2}<3$ であるから，

$$L_4(1)=\frac{1}{4},\ L_4(2)=\frac{2}{4}=\frac{1}{2},\ L_4(3)=\sqrt{1-\left(\frac{3}{4}\right)^2}=\frac{\sqrt{7}}{4}$$

より， $L_4(k)$ （ $k=1,2,3$ ）の最大値は

$$\frac{\sqrt{7}}{4} \qquad \cdots（ネ）$$

である．一方，$n=5$ のとき，$\dfrac{1}{\sqrt{2}}n=\sqrt{\dfrac{25}{2}}$ であり，$3<\sqrt{\dfrac{25}{2}}<4$ であるから，

$$L_5(1)=\frac{1}{5},\ L_5(2)=\frac{2}{5},\ L_5(3)=\frac{3}{5},\ L_5(4)=\sqrt{1-\left(\frac{4}{5}\right)^2}=\frac{3}{5}$$

より，$L_5(k)$（$k=1,2,3,4$）が最大となる k の値は

3　と　4 　　　…（ノ）（ハ）

の 2 個ある．

さて，③より，$L_n(k)$ は $1\leqq k<\dfrac{1}{\sqrt{2}}n$ で単調に増加し，$\dfrac{1}{\sqrt{2}}n<k\leqq n-1$ で単調に減少するから，$L_a(k)$ が最大となる k の値が 2 個あり，その大きい方の値が m であるとき，

$1\leqq k<\dfrac{1}{\sqrt{2}}n$ における最大値が $L_a(m-1)=\dfrac{m-1}{a}$

$\dfrac{1}{\sqrt{2}}n<k\leqq n-1$ における最大値が $L_a(m)=\sqrt{1-\left(\dfrac{m}{a}\right)^2}$

と表され，これらが一致する．したがって，$m\geqq 1$ のもとで，

$$\frac{m-1}{a}=\sqrt{1-\left(\frac{m}{a}\right)^2} \quad\Leftrightarrow\quad (m-1)^2=a^2-m^2$$

より，m は 2 次方程式

$$2m^2-2m+1-a^2=0$$

の解のうち 1 以上であるものであり，

$$m=\frac{1+\sqrt{2a^2-1}}{2} \qquad \cdots④\cdots（ヒ）$$

である．

次に，$b=3a+4m-2$ とおいたとき，④より

$$b=3a+4\cdot\frac{1+\sqrt{2a^2-1}}{2}-2=3a+2\sqrt{2a^2-1} \qquad \cdots⑤$$

と表され．$L_b(k)$ が最大となる k の値が 2 個あり，それらの大きい方の値を m' とすると，m' は④の a を b で置き換えたものである

$$\frac{1+\sqrt{2b^2-1}}{2}$$

となる．ここで，⑤を用いると，

$$\begin{aligned}\sqrt{2b^2-1}&=\sqrt{2\left(3a+2\sqrt{2a^2-1}\right)^2-1}\\&=\sqrt{2\left(17a^2-4+12a\sqrt{2a^2-1}\right)-1}\end{aligned}$$

$$= \sqrt{34a^2 - 9 + 24a\sqrt{2a^2 - 1}}$$
$$= 4a + 3\sqrt{2a^2 - 1}$$

となるから，m' は，

$$\frac{1 + 4a + 3\sqrt{2a^2 - 1}}{2} = \frac{4a + 3\left(1 + \sqrt{2a^2 - 1}\right) - 2}{2}$$
$$= 2a + 3m - 1 \qquad \cdots（フ）$$

と表される.

（注）　図形的考察を活用するとよい.