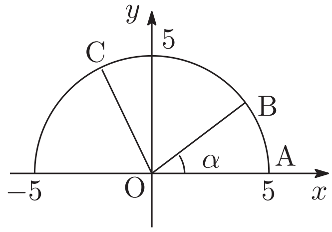
2025年度 慶應義塾大学 経済学部 数学

[1]

(1) $\sin\alpha=\dfrac{3}{5},\ \ \cos\alpha=\dfrac{4}{5}$ より, $0<\alpha<\dfrac{\pi}{4}$ であるから, $3\alpha<\pi$ であり, 右図のようになる。



(a) $\triangle\mathrm{OAB}=\dfrac{1}{2}\mathrm{OA}\cdot\mathrm{OB}\sin\alpha=\dfrac{1}{2}\cdot5\cdot5\cdot\dfrac{3}{5}=\dfrac{15}{2}$

であり, また, $\triangle\mathrm{OAB}$ に余弦定理を用いて,

$$\begin{aligned}\mathrm{AB}^2&=\mathrm{OA}^2+\mathrm{OB}^2-2\mathrm{OA}\cdot\mathrm{OB}\cos\alpha\\&=5^2+5^2-2\cdot5\cdot5\cdot\frac{4}{5}=10\end{aligned}$$

となるので,

$$\mathrm{AB}=\sqrt{10}$$

である。

(b) $\angle\mathrm{BOC}=\angle\mathrm{AOC}-\angle\mathrm{AOB}=3\alpha-\alpha=2\alpha$

であり, 2 倍角の公式より,

$$\sin2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha=2\cdot\frac{3}{5}\cdot\frac{4}{5}=\frac{24}{25}$$

$$\cos2\alpha=2\cos^2\alpha-1=2\left(\frac{4}{5}\right)^2-1=\frac{7}{25}$$

であるので,

$$\triangle\mathrm{OBC}=\frac{1}{2}\mathrm{OB}\cdot\mathrm{OC}\sin2\alpha=\frac{1}{2}\cdot5\cdot5\cdot\frac{24}{25}=12$$

となる。

また, $\triangle\mathrm{OBC}$ に余弦定理を用いて,

$$\mathrm{BC}^2=\mathrm{OB}^2+\mathrm{OC}^2-2\mathrm{OB}\cdot\mathrm{OC}\cos2\alpha=5^2+5^2-2\cdot5\cdot5\cdot\frac{7}{25}=36$$

となるので,

$$\mathrm{BC}=\sqrt{36}=6$$

である。

(c) 3 倍角の公式より,

$$\cos3\alpha=4\cos^3\alpha-3\cos\alpha=4\left(\frac{4}{5}\right)^3-3\cdot\frac{4}{5}=-\frac{44}{125}$$

となるので, $\triangle\mathrm{OAC}$ に余弦定理を用いて,

$$\begin{aligned}\mathrm{AC}^2&=\mathrm{OA}^2+\mathrm{OC}^2-2\mathrm{OA}\cdot\mathrm{OC}\cos3\alpha\\&=5^2+5^2-2\cdot5\cdot5\left(-\frac{44}{125}\right)\\&=\frac{338}{5}\end{aligned}$$

より,

$$\mathrm{AC}=\sqrt{\frac{338}{5}}=\frac{13}{5}\sqrt{10}$$

となる。

(2) 不等式

$$|m+n-6|+|m-n-2| \leqq 6 \qquad \cdots\cdots ①$$

について,

(i) $(m+n-6)(m-n-2) \geqq 0$ のとき,

$$(m+n-6 \geqq 0 \text{ かつ } m-n-2 \geqq 0) \text{ または } (m+n-6 \leqq 0 \text{ かつ } m-n-2 \leqq 0)$$

である。

(ア) $m+n-6 \geqq 0$ かつ $m-n-2 \geqq 0$ のとき, ①は,

$$(m+n-6)+(m-n-2) \leqq 6$$
$$2m \leqq 14$$

より,

$$m \leqq 7$$

となる。

(イ) $m+n-6 \leqq 0$ かつ $m-n-2 \leqq 0$ のとき, ①は,

$$-(m+n-6)-(m-n-2) \leqq 6$$
$$-2m \leqq -2$$

より,

$$m \geqq 1$$

となる。

(ii) $(m+n-6)(m-n-2) \leqq 0$ のとき,

$$(m+n-6 \geqq 0 \text{ かつ } m-n-2 \leqq 0) \text{ または } (m+n-6 \leqq 0 \text{ かつ } m-n-2 \geqq 0)$$

である。

(ア) $m+n-6 \geqq 0$ かつ $m-n-2 \leqq 0$ のとき, ①は,

$$(m+n-6)-(m-n-2) \leqq 6$$
$$2n \leqq 10$$

より,

$$n \leqq 5$$

となる。

(イ) $m+n-6 \leqq 0$ かつ $m-n-2 \geqq 0$ のとき, ①は,

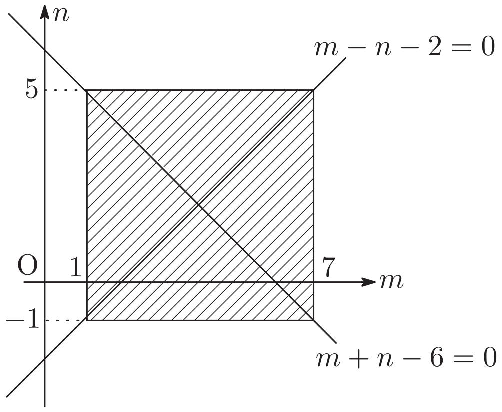
$$-(m+n-6)+(m-n-2) \leqq 6$$
$$-2n \leqq 2$$

より,

$$n \geqq -1$$

となる。

これより, ①の表す領域は下図のようになる。



よって, $(m+n-6)(m-n-2) \geqq 0$ のとき, ①を満たすための必要十分条件は,

$$1 \leqq m \leqq 7$$

であり, $(m+n-6)(m-n-2) \leqq 0$ のとき, ①を満たすための必要十分条件は,

$$-1 \leqq n \leqq 5$$

となる。

また,

$$\begin{aligned}(m-n)(m+n-6) &= m^2-n^2-6m+6n \\ &= (m-3)^2-(n-3)^2\end{aligned}$$

より, m, n が①を満たすときで, これが最大となるのは, $(m,\ n)=(7,\ 3)$ のときで, 最大値は,

$$(7-3)^2-(3-3)^2=4^2-0=16$$

となる。

[**2**]

$$\begin{cases} T_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{2}{3^k} \cdot \frac{(k+2)!}{(k-1)!}\ a_k & \cdots\cdots① \\ T_n = \left(n - \dfrac{1}{2}\right)^2 & \cdots\cdots② \end{cases}$$

(1)　①で $n=1$ とすると

$$\begin{aligned} T_1 &= \frac{2}{3} \cdot \frac{3!}{0!}\ a_1 \\ &= 4a_1 \end{aligned}$$

であり，②で $n=1$ とすると

$$\begin{aligned} T_1 &= \left(\frac{1}{2}\right)^2 \\ &= \frac{1}{4} \end{aligned}$$

であるから，

$$\begin{aligned} 4a_1 &= \frac{1}{4} \\ a_1 &= \frac{1}{16} \end{aligned}$$

と求められる。

　また，①で $n=2$ とすると

$$\begin{aligned} T_2 &= T_1 + \frac{2}{3^2} \cdot \frac{4!}{1!}\ a_2 \\ &= \frac{1}{4} + \frac{16}{3}\ a_2 \end{aligned}$$

であり，②で $n=2$ とすると

$$\begin{aligned} T_2 &= \left(\frac{3}{2}\right)^2 \\ &= \frac{9}{4} \end{aligned}$$

であるから，

$$\begin{aligned} \frac{1}{4} + \frac{16}{3}\ a_2 &= \frac{9}{4} \\ a_2 &= \frac{3}{8} \end{aligned}$$

と求められる。

(2)　$n \geqq 2$ について考える。①より

$$\begin{aligned} T_n - T_{n-1} &= \frac{2}{3^n} \cdot \frac{(n+2)!}{(n-1)!}\ a_n \\ &= \frac{2(n+2)(n+1)n}{3^n}\ a_n \end{aligned}$$

であり，②より

$$\begin{aligned} T_n - T_{n-1} &= \left(n - \frac{1}{2}\right)^2 - \left(n - \frac{3}{2}\right)^2 \\ &= 2n - 2 \end{aligned}$$

であるから，

$$\begin{aligned} \frac{2(n+2)(n+1)n}{3^n}\ a_n &= \left(n - \frac{1}{2}\right)^2 - \left(n - \frac{3}{2}\right)^2 \\ a_n &= \frac{n-1}{(n+2)(n+1)n}\ 3^n \end{aligned}$$

と求められる。

　すなわち，$(r, s, t, u) = (3, 0, 1, 2)$ である。

(3)　$k \geqq 2$ のとき，(2) より

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{k-1}{(k+2)(k+1)k}\ 3^k \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{3}{(k+2)(k+1)} - \frac{1}{(k+1)k}\right)\ 3^k \end{aligned}$$

が成り立つ。よって，$n \geqq 2$ のとき

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=1}^{n} a_k \\ &= a_1 + \sum_{k=2}^{n} a_k \\ &= \frac{1}{16} + \frac{1}{2}\sum_{k=2}^{n}\left(\frac{3}{(k+2)(k+1)} - \frac{1}{(k+1)k}\right)\ 3^k \end{aligned}$$

と表せる。

　$\dfrac{3^k}{(k+1)k} = b_k$ とおくと，

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{1}{16} + \frac{1}{2}\sum_{k=2}^{n}(b_{k+1} - b_k) \\ &= \frac{1}{16} + \frac{1}{2}(b_{n+1} - b_2) \\ &= \frac{1}{16} + \frac{1}{2}\left(\frac{3^{n+1}}{(n+2)(n+1)} - \frac{3^2}{3 \cdot 2}\right) \\ &= -\frac{11}{16} + \frac{3^{n+1}}{2(n+2)(n+1)} \end{aligned}$$

が得られる。この式で $n=1$ とすると $S_1=\dfrac{1}{16}$ となり，これは (1) より $S_1=a_1=\dfrac{1}{16}$ であることと一致する。したがって，$n \geqq 1$ に対して

$$S_n=-\frac{11}{16}+\frac{3^{n+1}}{2\,(n+2)\,(n+1)}$$

が成り立つ。

すなわち，$(p,q)=(1,2)$ である。

[3]

0 以上の整数 n に対して，n 回の試行後の点を $\mathrm{P}_n(x_n, y_n)$ と表す。ただし，$\mathrm{P}_0(0,0)$ とみなす。
(A) より

$$(x_{n+1}, y_{n+1}) = \begin{cases} (x_n+1, y_n+\sqrt{3}) & \left(\text{確率は}\left(\dfrac{1}{2}\right)^2 = \dfrac{1}{4}\right) & \cdots\cdots① \\ (x_n+1, y_n-\sqrt{3}) & \left(\text{確率は}\left(\dfrac{1}{2}\right)^2 = \dfrac{1}{4}\right) & \cdots\cdots② \\ (x_n-2, y_n) & \left(\text{確率は}\ \dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{2}\cdot {}_2\mathrm{P}_2 = \dfrac{1}{2}\right) & \cdots\cdots③ \end{cases}$$

である。

よって，①②③がそれぞれ a, b, c 回（a, b, c は 0 以上の整数）起きたとすると

$$(x_n, y_n) = \left(a+b-2c, \sqrt{3}(a-b)\right) \quad (a+b+c=n) \qquad \cdots\cdots④$$

と表せて，その確率を $p(a,b,c)$ と表すと

$$p(a,b,c) = \frac{n!}{a!\ b!\ c!}\left(\frac{1}{4}\right)^{a+b}\left(\frac{1}{2}\right)^{c} \qquad \cdots\cdots⑤$$

である。

(1)　3 回後に P が原点にある，つまり $(x_3, y_3) = (0,0)$ となるのは，④より

$$\begin{cases} a+b-2c = 0 \\ \sqrt{3}(a-b) = 0 \\ a+b+c = 3 \end{cases}$$

すなわち

$$(a,b,c) = (1,1,1)$$

のときである。

この確率は，⑤より

$$\begin{aligned} p(1,1,1) &= \frac{3!}{1!\ 1!\ 1!}\left(\frac{1}{4}\right)^{1+1}\left(\frac{1}{2}\right)^{1} \\ &= \frac{3}{16} \end{aligned}$$

である。

(2)　3 回後に P が y 軸上にある，つまり $x_3 = 0$ となるのは，④より

$$\begin{cases} a+b-2c &= 0 \\ a+b+c &= 3 \end{cases}$$

すなわち

$$(a, b, c) = (2, 0, 1), (1, 1, 1), (0, 2, 1)$$

のときである。

この確率は，⑤より

$$\begin{aligned} &p(2, 0, 1) + p(1, 1, 1) + p(0, 2, 1) \\ &= \frac{3!}{2!\ 0!\ 1!}\left(\frac{1}{4}\right)^{2+0}\left(\frac{1}{2}\right)^{1} + \frac{3!}{1!\ 1!\ 1!}\left(\frac{1}{4}\right)^{1+1}\left(\frac{1}{2}\right)^{1} + \frac{3!}{0!\ 2!\ 1!}\left(\frac{1}{4}\right)^{0+2}\left(\frac{1}{2}\right)^{1} \\ &= \frac{3}{8} \end{aligned}$$

である。

(3)　5 回後に P が x 軸上にある，つまり $y_5 = 0$ となるのは，④より

$$\begin{cases} \sqrt{3}(a-b) &= 0 \\ a+b+c &= 5 \end{cases}$$

すなわち

$$(a, b, c) = (2, 2, 1), (1, 1, 3), (0, 0, 5)$$

のときである。

⑤より

$$\begin{aligned} p(2, 2, 1) &= \frac{5!}{2!\ 2!\ 1!}\left(\frac{1}{4}\right)^{2+2}\left(\frac{1}{2}\right)^{1} \\ &= \frac{15}{256} \\ p(1, 1, 3) &= \frac{5!}{1!\ 1!\ 3!}\left(\frac{1}{4}\right)^{1+1}\left(\frac{1}{2}\right)^{3} \\ &= \frac{5}{32} \\ p(0, 0, 5) &= \frac{5!}{0!\ 0!\ 5!}\left(\frac{1}{4}\right)^{0+0}\left(\frac{1}{2}\right)^{5} \\ &= \frac{1}{32} \end{aligned}$$

であるから，求める確率は

$$\begin{aligned} p(2, 2, 1) + p(1, 1, 3) + p(0, 0, 5) &= \frac{15}{256} + \frac{5}{32} + \frac{1}{32} \\ &= \frac{63}{256} \end{aligned}$$

である。

(4) ④より，点 P の座標は

$$x \text{ 座標が整数，かつ，} y \text{ 座標が} \sqrt{3} \text{の整数倍である} \qquad \cdots\cdots(*)$$

という条件を満たすことが必要である。

円 $x^2+y^2=4$ 上で $(*)$ を満たす点は，$(\pm 2, 0), \left(\pm 1, \pm\sqrt{3}\right)$ である（複号任意）。a, b, c が整数であることに注意して，この条件を満たす (a, b, c) の組を調べる。

$(x_8, y_8) = (\pm 2, 0)$ となるのは，④より

$$\begin{cases} a+b-2c &= \pm 2 \\ \sqrt{3}\,(a-b) &= 0 \\ a+b+c &= 8 \end{cases}$$

すなわち

$$(a, b, c) = (3, 3, 2)$$

のときである。

また，$(x_8, y_8) = \left(\pm 1, \pm\sqrt{3}\right)$ （複号任意）となるのは，④より

$$\begin{cases} a+b-2c &= \pm 1 \\ \sqrt{3}\,(a-b) &= \pm\sqrt{3} \\ a+b+c &= 8 \end{cases}$$

すなわち

$$(a, b, c) = (3, 2, 3), (2, 3, 3)$$

のときである。

よって，(3) の条件のもとで 8 回後に点 P が円 $x^2+y^2=4$ 上にあるのは,

i) 5 回目までが $(a, b, c) = (2, 2, 1)$ であり，かつ 8 回目までが $(a, b, c) = (3, 3, 2), (3, 2, 3), (2, 3, 3)$ である

ii) 5 回目までが $(a, b, c) = (1, 1, 3)$ であり，かつ 8 回目までが $(a, b, c) = (3, 2, 3), (2, 3, 3)$ である

のいずれかのときだといえる。

そこで，6 回目から 8 回目までの 3 回の試行について，①②③がそれぞれ d, e, f 回（d, e, f は 0 以上の整数）起きたとする。その確率を $q(d, e, f)$ と表すと，⑤と同様にして

$$q(d, e, f) = \frac{n!}{d!\ e!\ f!} \left(\frac{1}{4}\right)^{d+e} \left(\frac{1}{2}\right)^{f} \qquad \cdots\cdots⑥$$

と表せる。

i) は 5 回目までが $(a, b, c) = (2, 2, 1)$ であり，かつ 6 回目から 8 回目までが $(d, e, f) = (1, 1, 1), (1, 0, 2), (0, 1, 2)$ となるときである。その確率は，⑥より

$$\begin{aligned}
&p(2, 2, 1) \cdot (q(1, 1, 1) + q(1, 0, 2) + q(0, 1, 2)) \\
&= \frac{15}{256} \times \left(\frac{3!}{1!\ 1!\ 1!} \left(\frac{1}{4}\right)^{1+1} \left(\frac{1}{2}\right)^{1} + \frac{3!}{1!\ 0!\ 2!} \left(\frac{1}{4}\right)^{1+0} \left(\frac{1}{2}\right)^{2} + \frac{3!}{0!\ 1!\ 2!} \left(\frac{1}{4}\right)^{0+1} \left(\frac{1}{2}\right)^{2} \right) \\
&= \frac{135}{4096}
\end{aligned}$$

である。

ii) は 5 回目までが $(a,b,c)=(1,1,3)$ であり，かつ 6 回目から 8 回目までが $(d,e,f)=(2,1,0),(1,2,0)$ となるときである。その確率は，⑥より

$$\begin{aligned}&p(1,1,3)\cdot(q(2,1,0)+q(1,2,0))\\&=\frac{5}{32}\times\left(\frac{3!}{2!\,1!\,0!}\left(\frac{1}{4}\right)^{2+1}\left(\frac{1}{2}\right)^{0}+\frac{3!}{1!\,2!\,0!}\left(\frac{1}{4}\right)^{1+2}\left(\frac{1}{2}\right)^{0}\right)\\&=\frac{15}{1024}\end{aligned}$$

である。

以上より，求める条件付き確率は

$$\frac{\frac{135}{4096}+\frac{15}{1024}}{\frac{63}{256}}=\frac{65}{336}$$

である。

[4]

(1)　$C : y = -x^2$ とする。

C について $y' = -2x$ であり，点 $\left(-p, -p^2\right)$ における C の接線は

$$\begin{aligned} y &= -2 \cdot (-p)\,(x - (-p)) - p^2 \\ &= 2px + p^2 \end{aligned}$$

である。

これと $y = 2m$ との交点 P_m の x 座標について

$$\begin{aligned} 2px + p^2 &= 2m \\ 2px &= 2m - p^2 \end{aligned}$$

$p \neq 0$ であり

$$x = \frac{m}{p} - \frac{1}{2}p$$

と求められる。

(2)　$\left(\mathrm{P}_m の\ x\ 座標\right) \leqq 1$ を解く。

$$\begin{aligned} \frac{m}{p} - \frac{1}{2}p &\leqq 1 \\ \frac{m}{p} &\leqq \frac{1}{2}p + 1 \end{aligned}$$

$p > 0$ であり

$$m \leqq \frac{1}{2}p^2 + p \qquad \cdots\cdots①$$

と求められる。

①を満たす自然数 m の最大値 N が 40 となるための必要十分条件は

$$\begin{aligned} & 40 \leqq \frac{1}{2}p^2 + p < 41 \\ \iff & \begin{cases} p^2 + 2p - 80 \geqq 0 \\ p^2 + 2p - 82 < 0 \end{cases} \\ \iff & \begin{cases} p \leqq -10, 8 \leqq p \\ -1 - \sqrt{83} < p < -1 + \sqrt{83} \end{cases} \end{aligned}$$

であり，これを満たす正の実数 p の範囲は

$$8 \leqq p < -1 + \sqrt{83}$$

である。

(3)　$a = 3n\log_3 6 - \log_3 2 + n$ のとき

$$\begin{aligned} a &= n(3\log_3 6 + 1) - \log_3 2 \\ &= \log_3 \frac{\left(2^3 \cdot 3^4\right)^n}{2} \end{aligned}$$

であり

$$\begin{aligned} 3^a &= \frac{\left(2^3 \cdot 3^4\right)^n}{2} \\ &= 2^{3n-1} \cdot 3^{4n} \qquad \cdots\cdots② \end{aligned}$$

と表せる。

n が自然数であるとき $3n-1, 4n$ はともに自然数であり，②は確かに 3^a の素因数分解となっている。

(4)

$$\begin{cases} p = 3^a & \cdots\cdots③ \\ N < 2^{1000} & \cdots\cdots④ \end{cases}$$

3^a が自然数であるとき，②③より p は偶数であり，$\dfrac{1}{2}p^2 + p$ は自然数である。よって，①を満たす自然数 m の最大値 N は $\dfrac{1}{2}p^2 + p$ である。このとき，④は

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2}p^2 + p < 2^{1000} \\ &p^2 + 2p < 2^{1001} \qquad \cdots\cdots⑤ \end{aligned}$$

と表せる。

$2p > 0$ より，⑤が成り立つためには $p^2 < 2^{2001}$ が必要である。この条件は，②③を用いると

$$\begin{aligned} &\left(2^{3n-1} \cdot 3^{4n}\right)^2 < 2^{1001} \\ \Longleftrightarrow\ &2^{6n-2} \cdot 3^{8n} < 2^{1001} \\ \Longleftrightarrow\ &3^{8n} < 2^{1003-6n} \\ \Longleftrightarrow\ &\log_2 3^{8n} < 1003 - 6n \\ \Longleftrightarrow\ &8n\log_2 3 < 1003 - 6n \\ \Longleftrightarrow\ &(6 + 8\log_2 3)\,n < 1003 \\ \Longleftrightarrow\ &n < \frac{1003}{6 + 8\log_2 3} \qquad \cdots\cdots⑥ \end{aligned}$$

と表せる。

ここで，$1.58 < \log_2 3 < 1.59$ より $18.64 < 6 + 8\log_2 3 < 18.72$ であり

$$\begin{aligned} \frac{1003}{18.72} &= 53.5\cdots \\ \frac{1003}{18.64} &= 53.8\cdots \end{aligned}$$

であることから

$$53 < \frac{1003}{6 + 8\log_2 3} < 54$$

が成り立つ。

よって，⑥を満たす最大の自然数 n は 53 である。

一方，$n=53$ のとき，②③より $p=2^{158}\cdot 3^{212}$ であり，$2<p$ が成り立つことから

$$p^2+2p<p^2+p\cdot p$$

すなわち

$$\begin{aligned} p^2+2p<2p^2&=2^{317}\cdot 3^{424} \\ \log_2\left(p^2+2p\right)&<\log_2\left(2^{317}\cdot 3^{424}\right) \\ \log_2\left(p^2+2p\right)&<317+424\log_2 3 \end{aligned}$$

である。$1.58<\log_2 3<1.59$ より $317+424\log_2 3<991.16<1001$ であり

$$\begin{aligned} \log_2\left(p^2+2p\right)&<1001 \\ p^2+2p&<2^{1001} \end{aligned}$$

が成り立つ。

以上より，③のとき④を満たす自然数 n の最大値は 53 である。

※

⑤について，p^2+2p は $p>0$ において単調に増加する。このことと，$n=53$ が⑤を満たし，$n=54$ が⑤を満たさないことから，求める n の最大値が 53 であることを導いてもよい。

[5]

C, D の方程式は

$$C : x^2 + y^2 + z^2 = 1$$
$$D : (x-4)^2 + y^2 + z^2 = 4$$

である。

(1)

$$\ell_1 : \begin{cases} y = px + q \\ z = 0 \end{cases}$$

とする。

$$\ell_1 : \begin{cases} px - y + q = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

と表せる。

C, D と xy 平面（$z=0$）との交線はそれぞれ

$$x^2 + y^2 = 1 \quad \cdots\cdots①$$
$$(x-4)^2 + y^2 = 4 \quad \cdots\cdots②$$

であり，xy 平面における点と直線の距離を考えると

$$\begin{aligned} & \ell_1\text{が①②の両方と接する} \\ \iff & \begin{cases} \left(\ell_1\text{と}\ (0,0,0)\ \text{との距離}\right) = \left(\text{①の半径}\right) \\ \left(\ell_1\text{と}\ (4,0,0)\ \text{との距離}\right) = \left(\text{②の半径}\right) \end{cases} \\ \iff & \begin{cases} \dfrac{|q|}{\sqrt{p^2 + (-1)^2}} = 1 \\ \dfrac{|4p+q|}{\sqrt{p^2 + (-1)^2}} = 2 \end{cases} \\ \iff & \begin{cases} |q| = \sqrt{p^2+1} & \cdots\cdots③ \\ |4p+q| = 2\sqrt{p^2+1} & \cdots\cdots④ \end{cases} \end{aligned}$$

が成り立つといえる。

③④より

$$\begin{aligned} |4p+q| &= 2|q| \\ 16p^2 + 8pq + q^2 &= 4q^2 \\ 16p^2 + 8pq - 3q^2 &= 0 \\ (4p+3q)(4p-q) &= 0 \\ q &= -\frac{4}{3}p,\ 4p \quad \cdots\cdots⑤ \end{aligned}$$

であり，③より

$$q^2 = p^2 + 1 \qquad \cdots\cdots⑥$$

であるから，⑤⑥より

$$\begin{cases} q = -\dfrac{4}{3}p \\ p^2 = \dfrac{9}{7} \end{cases} \text{または} \begin{cases} q = 4p \\ p^2 = \dfrac{1}{15} \end{cases}$$

が導かれる。

$0 < p < 1$，q は実数であることから

$$(p, q) = \left(\frac{1}{\sqrt{15}}, \frac{4}{\sqrt{15}}\right)$$

と求められる。

(2)

$$\ell_2 : \begin{cases} z = rx + s \\ y = 0 \end{cases}$$

とする。

(1) における (y, z) を (z, y)，(p, q) を (r, s) でそれぞれ置き換えることにより

$$\begin{cases} s = -\dfrac{4}{3}r \\ r^2 = \dfrac{9}{7} \end{cases} \text{または} \begin{cases} s = 4r \\ r^2 = \dfrac{1}{15} \end{cases}$$

が導かれる。

$r < -1$，s は実数であることから

$$(r, s) = \left(-\frac{3}{\sqrt{7}}, \frac{4}{\sqrt{7}}\right)$$

と求められる。

(3) $\mathrm{A}_1, \mathrm{A}_2$ は xy 平面上の直線 ℓ_1 上にあり，$\overrightarrow{\mathrm{A}_1\mathrm{E}} = (0, 0, 1)$ は xy 平面と垂直であるから，3 点 $\mathrm{A}_1, \mathrm{A}_2, \mathrm{E}$ を通る平面 α は ℓ_1 を含み xy 平面と垂直な平面である。

よって，α と xy 平面との交線を m_1 とすると，これは ℓ_1 と一致する。

また，$\mathrm{B}_1, \mathrm{B}_2$ は zx 平面上の直線 ℓ_2 上にあり，$\overrightarrow{\mathrm{B}_1\mathrm{F}} = (0, 1, 0)$ は zx 平面と垂直であるから，3 点 $\mathrm{B}_1, \mathrm{B}_2, \mathrm{F}$ を通る平面 β は ℓ_2 を含み zx 平面と垂直な平面である。

ここで，ℓ_2 と xy 平面との交点について，$z = 0$ より $x = \dfrac{4}{3}$，すなわち $\left(\dfrac{4}{3}, 0, 0\right)$ である。よって，β と xy 平面との交線を m_2 とすると，

$$m_2 : \begin{cases} x = \dfrac{4}{3} \\ z = 0 \end{cases}$$

である。

以上より，α と β の交線 ℓ と xy 平面との交点 G は，m_1 と m_2 との交点を考えて

$$\mathrm{G}\left(\frac{4}{3}, \frac{16}{3\sqrt{15}}, 0\right)$$

と求められる。

(4) ℓ_1 と zx 平面との交点について，$y=0$ より $x=-4$，すなわち $(-4,0,0)$ である。よって，α と zx 平面との交線を m_3 とすると，

$$m_3 : \begin{cases} x=-4 \\ y=0 \end{cases}$$

である。

また，β と zx 平面との交線を m_4 とすると，これは ℓ_2 と一致する。

以上より，α と β の交線 ℓ と zx 平面との交点 H は，m_3 と m_4 との交点を考えて

$$\mathrm{H}\left(-4, 0, \frac{16}{\sqrt{7}}\right)$$

と求められる。

ここで，OM の長さが一定であることから，△OMT の面積が最小となるのは，T から OM に下ろした垂線の長さが最小になるときだといえる。$\overrightarrow{\mathrm{OM}}=(4,0,0)$ であり，それと垂直な平面の一つは yz 平面であるから，3 点 T, G, H から yz 平面に下ろした垂線と yz 平面との交点をそれぞれ $\mathrm{T}', \mathrm{G}', \mathrm{H}'$ とすると，T から OM に下ろした垂線の長さが最小になるのは T' と O との距離が最小になるとき，すなわち $\mathrm{OT}' \perp \mathrm{G}'\mathrm{H}'$ となるときである。

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{\mathrm{OT}'} &= \overrightarrow{\mathrm{OG}'} + t\,\overrightarrow{\mathrm{G}'\mathrm{H}'} \\
&= \left(0, \frac{16}{3\sqrt{15}}, 0\right) + t\left(0, -\frac{16}{3\sqrt{15}}, \frac{16}{\sqrt{7}}\right) \\
&= \left(0, \frac{16}{3\sqrt{15}}(1-t), \frac{16}{\sqrt{7}}t\right) \\
\overrightarrow{\mathrm{G}'\mathrm{H}'} &= \left(0, -\frac{16}{3\sqrt{15}}, \frac{16}{\sqrt{7}}\right)
\end{aligned}$$

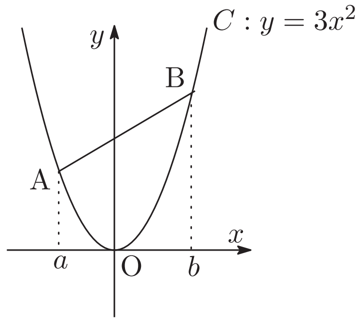
であるから，$\mathrm{OT}' \perp \mathrm{G}'\mathrm{H}'$ となる条件は

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{\mathrm{OT}'} \cdot \overrightarrow{\mathrm{G}'\mathrm{H}'} &= 0 \\
\left(0, \frac{16}{3\sqrt{15}}(1-t), \frac{16}{\sqrt{7}}t\right) \cdot \left(0, -\frac{16}{3\sqrt{15}}, \frac{16}{\sqrt{7}}\right) &= 0 \\
142t - 7 &= 0 \\
t &= \frac{7}{142}
\end{aligned}$$

であり，これが求める t の値である。

［ 6 ］

(1)　A$(a,\ 3a^2)$, B$(b,\ 3b^2)$ より, 直線 AB の方程式は,



$$y-3a^2=\frac{3b^2-3a^2}{b-a}(x-a)$$
$$y=3(a+b)x-3ab$$

となるので, 曲線 C と直線 AB で囲まれた図形の面積 S は,

$$\begin{aligned}S&=\int_a^b\{3(a+b)x-3ab-3x^2\}dx\\&=-3\int_a^b(x-a)(x-b)dx\\&=-3\int_a^b(x-a)\{(x-a)-(b-a)\}dx\\&=-\int_a^b 3(x-a)^2dx+3(b-a)\int_a^b(x-a)dx\\&=-\left[(x-a)^3\right]_a^b+3(b-a)\left[\frac{1}{2}(x-a)^2\right]_a^b\\&=-\{(b-a)^3-0\}+3(b-a)\left\{\frac{1}{2}(b-a)^2-0\right\}\\&=\frac{1}{2}(b-a)^3\end{aligned}$$ ……(答)

となる。

(2)　AB $=3$ であるとき,

$$\mathrm{AB}^2=9$$
$$(b-a)^2+(3b^2-3a^2)^2=9$$
$$(b-a)^2\{1+9(a+b)^2\}=9$$ ……①

が成り立つ。

ここで①は,

$$9(a+b)^2=\frac{9}{(b-a)^2}-1$$

となり, $(a+b)^2\geqq 0$ より,

$$\frac{9}{(b-a)^2}-1\geqq 0$$

が成り立つ。

また, (1) から, $b-a=(2S)^{\frac{1}{3}}$ であるので,

$$\frac{9}{(2S)^{\frac{2}{3}}}-1\geqq 0$$
$$(2S)^{\frac{2}{3}}\leqq 9$$
$$2S\leqq 9^{\frac{3}{2}}=3^3=27$$

より,

$$S\leqq\frac{27}{2}$$

となる。

この等号は,

$$a+b=0 \quad \text{かつ} \quad b-a=3$$

すなわち,

$$a=-\frac{3}{2},\quad b=\frac{3}{2}$$

のときに成り立ち, このとき, $\mathrm{AB}=3$ となる。

よって, S の取りうる値の最大値 T は,

$$T=\frac{27}{2} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

となる。

(3) 直線 AB の方程式を $y=mx+n$ とすると, $a,\ b$ は x の二次方程式

$$3x^2=mx+n$$
$$3x^2-mx-n=0$$

の 2 解

$$x=\frac{m\pm\sqrt{m^2+12n}}{3}$$

であるから, これと $a<b$ より,

$$a+b=\frac{2}{3}m,\quad b-a=\frac{2\sqrt{m^2+12n}}{3}$$

となる。

ここで $\mathrm{AB}=3$ のとき, ①が成り立つので, これを①に代入すると,

$$\left(\frac{2\sqrt{m^2+12n}}{3}\right)^2\left\{1+9\left(\frac{2}{3}m\right)^2\right\}=9$$

$$4(m^2+12n)(1+4m^2)=81 \qquad \cdots\cdots②$$

となる。

直線 AB が点 $(0,\ 7)$ を通るとすると, ②に $n=7$ を代入した,

$$4(m^2+84)(1+4m^2)=81 \qquad \cdots\cdots③$$

を満たす実数 m が存在するが, ③は

$$16m^4+352m^2+255=0$$

となり, m が実数のときこの左辺が正となるため, この方程式を満たす実数 m は存在しない。

したがって, $\mathrm{AB}=3$ のとき, 直線 AB は点 $(0,\ 7)$ を通らない。