2025年度 慶應義塾大学 医学部 数学

[I]

(1)

(あ)	(い)
84	148

ある年の高校 3 年生女子の身長を X とし，$Z=\dfrac{X-158}{5}$ とすると，Z は標準正規分布 $N(0,\ 1)$ に従う．このとき，与えられた数表より，

$$P(153 \leqq X \leqq 170.5)=P(-1.00 \leqq Z \leqq 2.50)=p(2.50)+p(1.00)$$

$$=0.4938+0.3413=0.8351$$

である．したがって，小数第 1 位を四捨五入すれば，この年の高校 3 年生女子の中で，身長が 153 cm 以上 170.5 cm 以下の生徒は

約 84 %

いる．また，$Z \leqq -2.00 \iff X \leqq 148$ であるから，与えられた数表より，

$$P(X \leqq 148)=P(Z \leqq -2.00)=P(Z \geqq 2.00)=0.50-p(2.00)=0.0228$$

つまり，$X \leqq 148$ である高校 3 年生女子が 2.28 % いる．さらに，$Z \leqq -1.80 \iff X \leqq 149$ であるから，与えられた数表より，

$$P(X \leqq 149)=P(Z \leqq -1.80)=P(Z \geqq 1.80)=0.50-p(1.80)=0.0359$$

つまり，身長 149 cm の高校 3 年生女子は身長が低い方から 2.5 % に入らないから，求める身長は，

148 cm

である．

(2)

(う)
$\dfrac{4}{e^2+1}$

確率密度関数の定義により，

$$\int_1^e f(x)\,dx=1 \quad \cdots\cdots (*)$$

である．ここで，部分積分法により，

$$\int_1^e f(x)\,dx = \int_1^e rx\log x\,dx = r\left\{\left[\frac{x^2}{2}\log x\right]_1^e - \int_1^e \frac{x^2}{2}\cdot\frac{1}{x}\,dx\right\}$$

$$= r\left\{\frac{e^2}{2} - \left[\frac{x^2}{4}\right]_1^e\right\} = \frac{e^2+1}{4}r$$

であるから，$(*)$ より，

$$r = \frac{4}{e^2+1}$$

である．

(3)

(え)
$\dfrac{4}{3\pi}$

区分求積法により，

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\sin^3\left(\frac{k\pi}{2n}\right) = \lim_{n\to\infty}\frac{2}{\pi}\cdot\frac{\pi}{2n}\sum_{k=1}^{n}\sin^3\left(\frac{k\pi}{2n}\right) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^3 x\,dx$$

であり，

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^3 x\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}}(\cos^2 x - 1)(\cos x)'\,dx = \left[\frac{1}{3}\cos^3 x - \cos x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{2}{3}$$

であるから，

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\sin^3\left(\frac{k\pi}{2n}\right) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^3 x\,dx = \frac{4}{3\pi}$$

である．

(4)

(お)
$\dfrac{13}{6}$

$$z^3 = 12\left(1+\sqrt{3}i\right) = 24\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right) \quad \cdots\cdots ①$$

の解を $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ とおくと，

$$r^3 = 24 \qquad \therefore \quad r = \sqrt[3]{24} = 2\cdot 3^{\frac{1}{3}}$$

であり，① より，

$$\cos 3\theta = \cos\frac{\pi}{3},\ \sin 3\theta = \sin\frac{\pi}{3}$$

であるから，

$$3\theta = \frac{\pi}{3} + 2n\pi \qquad \therefore \quad \theta = \frac{\pi}{9} + \frac{2n\pi}{3} \ (n \text{ は整数})$$

となる．つまり，

$$\mathrm{OA} = \mathrm{OB} = \mathrm{OC} = r$$

であり，

$$\text{OA と OB，OB と OC，OC と OA のなす角はいずれも } \frac{2\pi}{3}$$

であるから，

$$\triangle\mathrm{OAB} \equiv \triangle\mathrm{OBC} \equiv \triangle\mathrm{OCA}$$

であることに注意すれば，

$$\triangle\mathrm{ABC} = 3\triangle\mathrm{OAB} = 3 \cdot \frac{1}{2} r^2 \sin\frac{2\pi}{3} = \frac{3}{2} \cdot 4 \cdot 3^{\frac{2}{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 3^{1+\frac{2}{3}+\frac{1}{2}} = 3^{\frac{13}{6}}$$

より，

$$s = \frac{13}{6}$$

である．

(5) $\dfrac{a\sqrt{2}+b}{c\sqrt{2}+d} = 2\sqrt{2}$ より，

$$\sqrt{2}a + b = 4c + 2\sqrt{2}d \qquad \therefore \quad \sqrt{2}(a-2d) = 4c - b$$

であり，$a - 2d \neq 0$ とすると，

$$\sqrt{2} = \frac{4c-b}{a-2d}$$

となるが，これは，有理数 $\dfrac{4c-b}{a-2d}$ と無理数 $\sqrt{2}$ が等しいことを示しており不合理である．

したがって，

$$a = 2d,\ b = 4c \ \cdots\cdots ①$$

である．$a \geqq 0,\ b \geqq 0$ と ① より，

$$c \geqq 0,\ d \geqq 0 \ \cdots\cdots ②$$

となる．① を $ad + bc = 18$ に代入すると，

$$2d^2 + 4c^2 = 18 \qquad \therefore \quad d^2 + 2c^2 = 9$$

となる．$c,\ d$ は整数であり，$2c^2 = 9 - d^2 \leqq 9$ より，

$$c = 0,\ 1,\ 2$$

に限るが，$c = 1$ のとき $d^2 = 7$ となり，これを満たす整数 d は存在しないから，$c = 0,\ 2$ のときのみ考えればよい．② に注意すれば，

$$c = 2 \text{ のとき } d = 1,\ c = 0 \text{ のとき } d = 3$$

であるから，求める整数の組 $(a,\ b,\ c,\ d)$ は，① より，

$$(a,\ b,\ c,\ d) = (2,\ 8,\ 2,\ 1),\ (6,\ 0,\ 0,\ 3)$$

である．

[II]

(1)

(あ)	(い)	(う)	(え)	(お)	(か)	(き)
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{3}{4}$	$\left(\frac{1}{2}\right)^n$	5
(く)	(け)	(こ)	(さ)	(し)	(す)	(せ)
$\frac{3}{5}$	$\frac{1}{2}$	4	$\frac{3}{4}$	-2	$\frac{3}{5}$	$\frac{1}{2}$

事象A，B，Cを次のように定める．

A：袋に入っている白玉の個数が3個

B：袋に入っている白玉の個数が2個

C：袋に入っている白玉の個数が1個

$n+1$回の操作後にAであるのは，n回の操作後にAであり次の操作で赤玉を取り出す場合である．

$n+1$回の操作後にBであるのは，

n回の操作後にAであり，次の操作で白玉を取り出す．

n回の操作後にBであり，次の操作で赤玉を取り出す．

のいずれかの場合である．

$n+1$回の操作後にCであるのは，

n回の操作後にBであり，次の操作で白玉を取り出す．

n回の操作後にCであり，次の操作で赤玉を取り出す．

のいずれかの場合である．

操作Tを行った後，赤玉の個数は3個で変わらないことに注意すると，

$$\begin{cases} a_{n+1}=a_n\cdot\frac{3}{6} \\ b_{n+1}=a_n\cdot\frac{3}{6}+b_n\cdot\frac{3}{5} \\ c_{n+1}=b_n\cdot\frac{2}{5}+c_n\cdot\frac{3}{4} \end{cases} \qquad \therefore \begin{cases} a_{n+1}=\frac{1}{2}a_n & \cdots① \\ b_{n+1}=\frac{1}{2}a_n+\frac{3}{5}b_n & \cdots② \\ c_{n+1}=\frac{2}{5}b_n+\frac{3}{4}c_n & \cdots③ \end{cases}$$

である．

赤玉3個，白玉3個の状態からはじめることから，$a_0=1$，$b_0=c_0=0$とすると，①，②，③は$n\geqq 0$で成り立ち，①より，$\{a_n\}$は公比$\frac{1}{2}$の等比数列であるから，

$$a_n=a_0\left(\frac{1}{2}\right)^n=\left(\frac{1}{2}\right)^n$$

である．

このとき，②より，

$$b_{n+1}=\frac{3}{5}b_n+\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} \qquad \therefore \ b_{n+1}+5\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}=\frac{3}{5}\left\{b_n+5\left(\frac{1}{2}\right)^n\right\}$$

$\left\{b_n+5\left(\frac{1}{2}\right)^n\right\}$は公比$\frac{3}{5}$の等比数列であるから，

$$b_n+5\left(\frac{1}{2}\right)^n=\left\{b_0+5\left(\frac{1}{2}\right)^0\right\}\left(\frac{3}{5}\right)^n$$

$$\therefore \quad b_n=5\left\{\left(\frac{3}{5}\right)^n-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right\}$$

である．さらに，このとき，③より，

$$c_{n+1}=\frac{3}{4}c_n+2\left\{\left(\frac{3}{5}\right)^n-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right\}$$

$$\therefore \quad c_{n+1}+\frac{40}{3}\left(\frac{3}{5}\right)^{n+1}-8\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}=\frac{3}{4}\left\{c_n+\frac{40}{3}\left(\frac{3}{5}\right)^n-8\left(\frac{1}{2}\right)^n\right\}$$

$\left\{c_n+\frac{40}{3}\left(\frac{3}{5}\right)^n-8\left(\frac{1}{2}\right)^n\right\}$は公比$\frac{3}{4}$の等比数列であるから，

$$c_n+\frac{40}{3}\left(\frac{3}{5}\right)^n-8\left(\frac{1}{2}\right)^n=\left\{c_0+\frac{40}{3}\left(\frac{3}{5}\right)^0-8\left(\frac{1}{2}\right)^0\right\}\left(\frac{3}{4}\right)^n$$

$$\therefore \quad c_n=\frac{16}{3}\left(\frac{3}{4}\right)^n-\frac{40}{3}\left(\frac{3}{5}\right)^n+8\left(\frac{1}{2}\right)^n=4\left\{\left(\frac{3}{4}\right)^{n-1}-2\left(\frac{3}{5}\right)^{n-1}+\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right\}$$

である．

(2)

(そ)	(た)	(ち)	(つ)	(て)
$\frac{1}{2}n+1$	3	$-\frac{1}{4}$	-1	$-\frac{3}{2}$

$a_0=1$であることに注意すると，

$$P(X_n=k)=P\left(Y_n=2^k\right)=a_k-a_{k+1}=\left(\frac{1}{2}\right)^{k+1} \quad (0\leqq k\leqq n-1\text{ のとき})$$

$$P(X_n=n)=P(Y_n=2^n)=a_n=\left(\frac{1}{2}\right)^n$$

である．したがって，Y_nの期待値$E(Y_n)$は，

$$E(Y_n)=\sum_{k=0}^{n}2^kP\left(Y_n=2^k\right)=\sum_{k=0}^{n-1}2^k\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{k+1}+2^n\left(\frac{1}{2}\right)^n=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{2}+1=\frac{1}{2}n+1$$

である．また，

$$E({Y_n}^2)=\sum_{k=0}^{n}\left(2^k\right)^2P\left(Y_n=2^k\right)=\sum_{k=0}^{n-1}\left(2^k\right)^2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{k+1}+(2^n)^2\left(\frac{1}{2}\right)^n$$

$$=\sum_{k=0}^{n-1}2^{k-1}+2^n=\frac{1}{2}\cdot\frac{2^n-1}{2-1}+2^n=\frac{3\cdot 2^n-1}{2}$$

であるから，分散は，

$$V(Y_n)=E({Y_n}^2)-\{E(Y_n)\}^2=\frac{3\cdot 2^n-1}{2}-\left(\frac{1}{2}n+1\right)^2$$

$$=3\cdot 2^{n-1}-\frac{1}{4}n^2-n-\frac{3}{2}$$

である．

[III]

(1)(i)

(あ)
$24x^6-4x^2+1$

$$
\begin{aligned}
P(Q(x)) &= 3(2x^2+1)^3-9(2x^2+1)^2+7(2x^2+1)\\
&= 3(8x^6+12x^4+6x^2+1)-9(4x^4+4x^2+1)+7(2x^2+1)\\
&= 24x^6-4x^2+1
\end{aligned}
$$

(ii)（証明）

2つの多項式

$$G(x)=a_mx^m+\cdots+a_1x+a_0$$
$$H(x)=b_nx^n+\cdots+b_1x+b_0$$

について，n が自然数であって $b_n\neq 0$ であるとき，$H(x)$ は n 次の多項式である．

0以上の整数 m について

$G(H(x))=0$ が x についての恒等式ならば，$a_m=\cdots=a_0=0$ …（※）

となることを，数学的帰納法により示す．

(I)　$m=0$ のとき

$G(H(x))=a_0$ が 0 に等しいので，$a_0=0$ である．よって（※）は成り立つ．

(II)　$m=k$（k は 0 以上の整数）のとき，（※）が成り立つと仮定する．

$m=k+1$ のとき

$$G(H(x))=a_{k+1}\{H(x)\}^{k+1}+a_k\{H(x)\}^k+\cdots+a_1H(x)+a_0$$

は $k+1, n$ がともに自然数であるから，次数が $(k+1)n$，最高次の係数が $a_{k+1}{b_n}^{k+1}$ の多項式である．よって，$G(H(x))=0$ が x についての恒等式ならば，$a_{k+1}{b_n}^{k+1}=0$ が言え，$b_n\neq 0$ より $a_{k+1}=0$，すなわち

$$G(x)=a_kx^k+\cdots+a_1x+a_0$$

と表される．したがって，仮定より $a_k=\cdots=a_0=0$ であるから

$$a_{k+1}=a_k=\cdots=a_0=0$$

となり，$m=k+1$ のときも（※）が成り立つ．

(I)，(II)より，nが自然数であって$b_n \neq 0$であるとき，0以上のすべての整数mについて，

$G\left(H(x)\right)=0$がxについての恒等式ならば$a_m=\cdots=a_0=0$である．　（証明終）

（別証）

$H(x)$はn次の多項式であるから，$m+1$個の互いに異なる実数値$c_0, c_1, \cdots, c_m$をとることができる．これを用いると

$$G(c_0)=G(c_1)=G(c_2)=\cdots=G(c_m)=0$$

が成り立つので，m次以下の多項式$G(x)$は$m+1$個の1次式$x-c_0, x-c_1, \cdots, x-c_m$を因数に持つことが分かる．よって多項式$s(x)$を用いて

$$G(x)=(x-c_0)(x-c_1)\cdot\cdots\cdot(x-c_m)\cdot s(x)$$

と表せるが，$s(x)\neq 0$とすると右辺は$m+1$次以上であるから，$s(x)=0$である．

したがって，$G(x)=0$であるから，

$$a_m=\cdots=a_0=0$$

が示された．　（証明終）

(2)(i)

(い)	(う)	(え)	(お)	(か)
a	3	$-3a$	$-6a^2+4a-1$	$-3a^3$

$$g(x)=\int_0^x f(t)dt \quad \cdots①$$

$$h(x)=\int_x^1 f(t)dt \quad \cdots②$$

$$g(1)=\int_0^1 f(t)dt=a \quad \cdots③$$

$$g\left(h(x)\right)-\left(\{h(x)\}^3+b\{g(x)\}^2+ch(x)+d\right)=0 \quad \cdots④$$

$$f(1)=2(1-a) \quad \cdots⑤$$

①，②，③より

$$g(x)+h(x)=\int_0^x f(t)dt+\int_x^1 f(t)dt=\int_0^1 f(t)dt=a \quad \cdots⑥$$

である．⑥を用いて④を変形すると

$$g\left(h(x)\right)-\left(\{h(x)\}^3+b\{a-h(x)\}^2+ch(x)+d\right)=0$$

$$\therefore \quad g(h(x)) - \left[\{h(x)\}^3 + b\{h(x)\}^2 + (c-2ab)h(x) + a^2b + d\right] = 0 \qquad \cdots⑥'$$

となる．ここで

$$G(x) = g(x) - \{x^3 + bx^2 + (c-2ab)x + a^2b + d\}$$

とおくと，⑥'式は$G(h(x)) = 0$とかける．また，②と$f(x) \neq 0$より$h(x)$は定数ではない多項式である．よって，⑥'がxについての恒等式であるから、(1)(ii)で示したことより

$G(x) = 0$　すなわち　$g(x) = x^3 + bx^2 + (c-2ab)x + a^2b + d$

となる．よって，多項式$g(x)$は

3次式

である．

次に，$g(0) = 0$より

$$g(0) = a^2b + d = 0 \qquad \cdots⑦$$

であり，③より

$$g(1) = 1 + b + (c-2ab) + a^2b + d = a \qquad \cdots⑧$$

である．そして①より

$$g'(x) = \frac{d}{dx}\int_0^x f(t)\,dt = f(x)$$

であるから

$$f(x) = g'(x) = 3x^2 + 2bx + (c-2ab)$$

と表される．これと⑤より

$$f(1) = 3 + 2b + (c-2ab) = 2(1-a) \qquad \cdots⑨$$

である．したがって，⑦，⑧，⑨より

$b = -3a$

$c = -6a^2 + 4a - 1$

$d = 3a^3$

である．

(ii)

(き)	(く)	(け)	(こ)
$\frac{1}{3}$	1	$\frac{3a - \sqrt{9a^2 - 12a + 3}}{3}$	$\frac{3a + 2\sqrt{9a^2 - 12a + 3}}{3}$

(i)より

$$g(x)=x^3-3ax^2+(4a-1)x$$

であるから

$$g'(x)=3x^2-6ax+(4a-1)$$

である．ここで，2 次方程式

$$g'(x)=3x^2-6ax+(4a-1)=0 \quad \cdots⑩$$

の判別式を D とすると

$$D/4=(-3a)^2-3(4a-1)=9a^2-12a+3$$

である．これを用いれば

$g(x)$ が極値をもつ　⇔　$g'(x)$ の符号が変化することがある
　　⇔　2 次方程式⑩が相異なる 2 つの実数解を持つ
　　⇔　$D>0$
　　⇔　$3(a-1)(3a-1)>0$

となるから，$g(x)$ が極値をもつための必要十分条件は

$$a<\frac{1}{3} \quad \text{または} \quad a>1$$

である．a がこの条件を満たすとき，⑩の異なる 2 実数解を $x=\alpha,\beta$（$\alpha<\beta$）とおくと，$g(x)$ の増減は次の表のようになる．

x	$\cdots$	α	$\cdots$	β	$\cdots$
$g'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$g(x)$	↗		↘		↗

⑩の実数解は $x=\dfrac{3a\pm\sqrt{9a^2-12a+3}}{3}$ であることより，$g(x)$ は

$$x=\alpha=\frac{3a-\sqrt{9a^2-12a+3}}{3}$$

で極大値 M をとる．

そして，$M=g(\alpha)$ であり，曲線 $y=g(x)$ と直線 $y=M$ は点 $(\alpha, g(\alpha))$ で接する．よって，

方程式 $g(x)=M$，すなわち

$$x^3-3ax^2+(4a-1)x-M=0 \quad \cdots⑪$$

は $x=\alpha$ を重解に持つ．⑪の他の実数解を γ とおくと，3 次方程式の解と係数の関係より

$$\alpha+\alpha+\gamma=3a$$

が成り立つので，方程式 $g(x)=M$ の解は $x=\alpha$ と

$$
\begin{aligned}
x=\gamma&=3a-2\alpha\\
&=3a-2\cdot\frac{3a-\sqrt{9a^2-12a+3}}{3}\\
&=\frac{3a+2\sqrt{9a^2-12a+3}}{3}
\end{aligned}
$$

である．

(iii)

（さ）	（し）	（す）	（せ）
$-3a^2+4a-1$	a^3	$a^2e^{-\frac{a^2}{2}}$	$\frac{2}{e}$

曲線 $y=g(x)$ 上の点 $(a, g(a))$ における接線の方程式は

$$
\begin{aligned}
y&=g'(a)(x-a)+g(a)\\
&=(-3a^2+4a-1)(x-a)+(-2a^3+4a^2-a)\\
&=(-3a^2+4a-1)x+a^3
\end{aligned}
$$

である．さらに

$$
\begin{aligned}
F(a)&=\int_0^a\left\{g(x)-(-3a^2+4a-1)x-a^3-2(x-a)\right\}e^{-\frac{(x-a)^2}{2}}dx\\
&=\int_0^a\left\{x^3-3ax^2+3a^2x-a^3-2(x-a)\right\}e^{-\frac{(x-a)^2}{2}}dx\\
&=\int_0^a\left\{(x-a)^3-2(x-a)\right\}e^{-\frac{(x-a)^2}{2}}dx
\end{aligned}
$$

と定めると

$$
\begin{aligned}
F(a)&=\int_0^a(x-a)^3e^{-\frac{(x-a)^2}{2}}dx-2\int_0^a(x-a)e^{-\frac{(x-a)^2}{2}}dx\\
&=\int_0^a-(x-a)^2\left\{-\frac{(x-a)^2}{2}\right\}'e^{-\frac{(x-a)^2}{2}}dx-2\int_0^a(x-a)e^{-\frac{(x-a)^2}{2}}dx\\
&=\left[-(x-a)^2e^{-\frac{(x-a)^2}{2}}\right]_0^a+2\int_0^a(x-a)e^{-\frac{(x-a)^2}{2}}dx-2\int_0^a(x-a)e^{-\frac{(x-a)^2}{2}}dx\\
&=a^2e^{-\frac{a^2}{2}}
\end{aligned}
$$

と表される． $F(a)$ は偶関数であるから， $F(a)$ の最大値を求めるには $a\geqq 0$ で考えれば十分であり

$$F'(a)=2ae^{-\frac{a^2}{2}}-a^3e^{-\frac{a^2}{2}}=-e^{-\frac{a^2}{2}}a\left(a+\sqrt{2}\right)\left(a-\sqrt{2}\right)$$

であるから，$a \geqq 0$ における $F(a)$ の増減は下の表のようになる．

a	0	$\cdots$	$\sqrt{2}$	$\cdots$
$F'(a)$	0	$+$	0	$-$
$F(a)$		$\nearrow$		$\searrow$

したがって，$F(a)$ の最大値は

$$F\left(\sqrt{2}\right)=\frac{2}{e}$$

である．

［Ⅳ］

（1）

(あ)	(い)	(う)	(え)	(お)
$\dfrac{2-p}{2}$	$\dfrac{2-2p}{2-p}$	$\dfrac{2}{3}$	$\dfrac{2p}{2-p}$	$\dfrac{3p-2}{2}$

次の移動ア，イ，ウを続けて行い，最終的なP_2，P_3，P_4の位置をそれぞれP_2'，P_3'，P_4'とする.

ア　P_1を通るSの辺に関して，Sと折れ線$P_1P_2P_3P_4$を対称移動する

イ　アの移動後のP_2を通るSの辺に関して，移動後のSと折れ線$P_2P_3P_4$を対称移動する

ウ　イの移動後のP_3を通るSの辺に関して，移動後のSと線分P_3P_4を対称移動する

このとき，5点P_0，P_1，P_2'，P_3'，P_4'はこの順に同一平面上にあり，$p_4=0$ならば図1，$q_4=1$ならば図2のようになる.

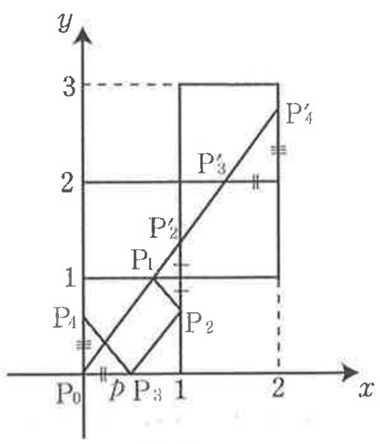

図1

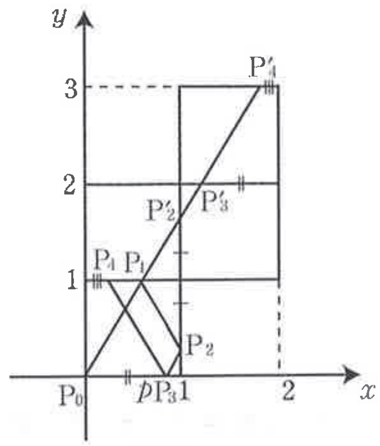

図2

これより，$P_3'(2-p,\ 2)$であるから，直線P_0P_1の方程式は，

$$y=\frac{2}{2-p}x$$

であり，P_1は直線P_0P_1と直線$y=1$の交点，P_2'は直線P_0P_1と直線$x=1$の交点であるから，$P_1\left(\dfrac{2-p}{2},\ 1\right)$，$P_2'\left(1,\ \dfrac{2}{2-p}\right)$である.

よって，

$$p_1=\frac{2-p}{2},\quad q_2=2-\frac{2}{2-p}=\frac{2-2p}{2-p}$$

である.

図1のようになるのは，点$(2,\ 3)$が直線P_0P_1の上側または直線上にあるときであるから，$3\geqq\dfrac{2}{2-p}\cdot2$，すなわち，$0<p\leqq\dfrac{2}{3}$のときであり，このとき，$P_4'$は直線$P_0P_1$と直線$x=2$の交点であるから，$P_4'\left(2,\ \dfrac{4}{2-p}\right)$である.

よって，$0<p\leqq\dfrac{2}{3}$のとき，

$$q_4=\frac{4}{2-p}-2=\frac{2p}{2-p}$$

である．

図２のようになるのは，点$(2,\ 3)$が直線P_0P_1の下側または直線上にあるときであるから，$3 \leqq \dfrac{2}{2-p}\cdot 2$，すなわち，$\dfrac{2}{3} \leqq p < 1$のときであり，このとき，$P_4{}'$は直線$P_0P_1$と直線$y=3$の交点であるから，$P_4{}'\left(\dfrac{6-3p}{2},\ 3\right)$である．

よって，$\dfrac{2}{3} \leqq p < 1$のとき，

$$p_4 = 2 - \frac{6-3p}{2} = \frac{3p-2}{2}$$

である．

（２）

（か）	（き）	（く）	（け）	（こ）	（さ）	（し）	（す）	（せ）	（そ）
$\dfrac{a_1}{b_1}$	$\dfrac{a}{2}$	$\dfrac{2-b}{2}$	$\dfrac{a}{2-b}$	$\dfrac{2-2b}{2-b}$	$\dfrac{2}{3}$	$2-2a$	$\dfrac{2-2a}{a}$	$\dfrac{3}{2}a$	$\dfrac{3b-2}{2}$

次の移動エ，オ，カを続けて行い，最終的なQ_2，Q_3，Q_4の位置をそれぞれ$Q_2{}'$，$Q_3{}'$，$Q_4{}'$とする．

エ　Q_1を通るTの面に関して，Tと折れ線$Q_1Q_2Q_3Q_4$を対称移動する

オ　エの移動後のQ_2を通るTの面に関して，移動後のTと折れ線$Q_2Q_3Q_4$を対称移動する

カ　オの移動後のQ_3を通るTの面に関して，移動後のTと線分Q_3Q_4を対称移動する

このとき，５点Q_0，Q_1，$Q_2{}'$，$Q_3{}'$，$Q_4{}'$はこの順に同一平面上にある．

ここで，Q_iのxy平面への正射影をZ_i，yz平面への正射影をX_i（$i=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4$）とし，$Q_i{}'$のxy平面への正射影を$Z_i{}'$，yz平面への正射影を$X_i{}'$（$i=2,\ 3,\ 4$）とする．

（ｉ）　２点$Z_0(0,\ 0,\ 0)$，$Z_1(a_1,\ b_1,\ 0)$を通る直線lの方程式は，

$$y = \frac{b_1}{a_1}x,\quad z=0$$

であるから，この直線と平面$y=1$の交点は$Z_2\left(\dfrac{a_1}{b_1},\ 1,\ 0\right)$であり，$a_2=\dfrac{a_1}{b_1}$となる．

（ⅱ）　Q_0，Q_1，Q_2，Q_3，Q_4のy座標，z座標は，P_0，P_1，P_2，P_3，P_4のx座標，y座標において，p_1，q_2，p，p_4，q_4をそれぞれb_1，c_2，b，b_4，c_4に換えたものである．
……①

よって，①と（１）の結果より，

$$b_1 = \frac{2-b}{2},\quad c_2 = \frac{2-2b}{2-b}$$

である．

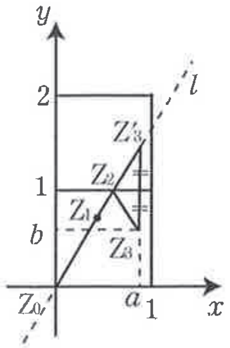

図3

一方，$Z_3\,(=Q_3)$に対してZ_3'は図3のような点であり，$Z_3'(a,\ 2-b,\ 0)$となるから，Z_3'がl上にあることより，

$$2-b=\frac{b_1}{a_1}a$$

$$\therefore\quad a_1=\frac{a}{2-b}b_1=\frac{a}{2},\quad a_2=\frac{a_1}{b_1}=\frac{a}{2-b}$$

となり，lの方程式は，

$$y=\frac{2-b}{a}x,\quad z=0$$

となる．

さらに，$b_4=0$となる条件は，①と$p_4=0\iff 0<p\leqq\dfrac{2}{3}$より，$0<b\leqq\dfrac{2}{3}$であり，このとき，$a_4=1$となる条件は，$l$が点$(1,\ 2,\ 0)$を通ることである．

よって，$a_4=1$，$b_4=0$となる条件は，$0<b\leqq\dfrac{2}{3}$かつ$2=\dfrac{2-b}{a}$，すなわち，

$$b=2-2a\ \text{かつ}\ \frac{2}{3}\leqq a<1$$

であり，このとき，①と$p_4=0$のとき$q_4=\dfrac{2p}{2-p}$であることより，

$$c_4=\frac{2b}{2-b}=\frac{2-2a}{a}$$

である．

また，$0<a\leqq\dfrac{2}{3}$かつ$\dfrac{2}{3}\leqq b<1$であるとき，①と$\dfrac{2}{3}\leqq p<1$のとき$p_4=\dfrac{3p-2}{2}$，$q_4=1$であることより，

$$b_4=\frac{3b-2}{2},\quad c_4=1$$

であり，①と$\dfrac{2}{3}\leqq p<1$のとき$P_0P_1=P_1P_3'=P_3'P_4'$であることより，

$$X_0X_1=X_1X_3'=X_3'X_4'\qquad\therefore\quad Q_0Q_1=Q_1Q_3'=Q_3'Q_4'$$

$$\therefore\quad Z_0Z_1=Z_1Z_3'=Z_3'Z_4'$$

となるから，$0<\dfrac{3}{2}a\leqq 1$より，

$$a_4=3a_1=\frac{3}{2}a$$

である．