

2025年度 神戸大学 前期 数学 理系

2025年度 神戸大学 前期理系 理系1.

(1) $f(x) = |x^3 - x|$

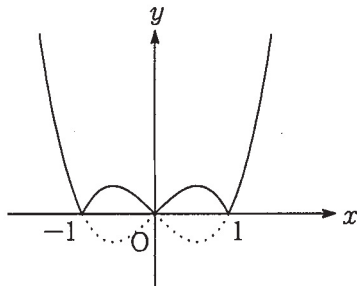
$x^3 - x = x(x+1)(x-1)$ より,

$$\begin{cases} x^3 - x \geq 0 & (-1 \leq x \leq 0, 1 \leq x \text{ のとき}) \\ x^3 - x \leq 0 & (x \leq -1, 0 \leq x \leq 1 \text{ のとき}) \end{cases}$$

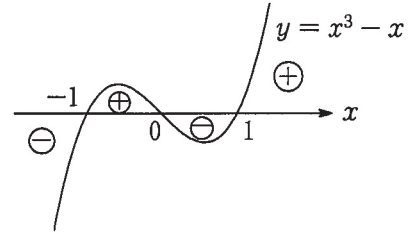
となるので,

$$f(x) = \begin{cases} x(x+1)(x-1) & (-1 \leq x \leq 0, 1 \leq x \text{ のとき}) \\ -x(x+1)(x-1) & (x \leq -1, 0 \leq x \leq 1 \text{ のとき}) \end{cases}$$

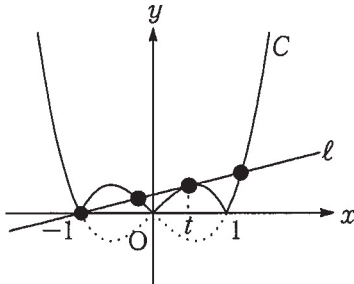
よって, 曲線 $C: y = f(x)$ の概形は下図の実線のようなになる。



..... (答)



(2) C と ℓ は, k の値によらず点 $(-1, 0)$ を共有する $\cdots(\star)$ ので,



「 C と ℓ がちょうど4つの共有点をもつ」条件は「 C と ℓ が点 $(-1, 0)$ 以外に3つの共有点をもつ」 $\cdots(*)$ であり, $(\star)$ より, ℓ が C の $-1 < x < 0$ の部分で接することはないので,

「 ℓ が C の $0 < x < 1$ の部分と接する」条件を考える。

$y = -(x^3 - x)$ において $y' = -3x^2 + 1$ より, C 上の点 $(t, -t^3 + t) (0 < t < 1)$ における接線の方程式は

$$y - (-t^3 + t) = (-3t^2 + 1)(x - t)$$

$$y = (-3t^2 + 1)x + 2t^3 \cdots \textcircled{1}$$

① が点 $(-1, 0)$ を通る条件は

$$0 = (-3t^2 + 1)(-1) + 2t^3$$

$$2t^3 + 3t^2 - 1 = 0$$

$$(t+1)^2(2t-1) = 0$$

$$t = -1, \frac{1}{2}$$

$$0 < t < 1 \text{ より, } t = \frac{1}{2}$$

よって、 $t = \frac{1}{2}$ のときの①が、(*)を満たすときの ℓ であり、

$$y = \frac{1}{4}(x+1)$$

ゆえに、 $k = \frac{1}{4}$ ……(答)

<別解> 「 C と ℓ がちょうど4つの共有点をもつ」条件は

「 $f(x) = g(x)$ が異なる4つの実数解をもつ」…(**)

であり、

(i) $-1 \leq x \leq 0, 1 \leq x$ のとき $f(x) = g(x)$ より

$$x(x+1)(x-1) = k(x+1)$$

$$(x+1)(x^2 - x - k) = 0$$

$$x = -1, k = x^2 - x$$

(ii) $x \leq -1, 0 \leq x \leq 1$ のとき $f(x) = g(x)$ より

$$-x(x+1)(x-1) = k(x+1)$$

$$(x+1)(x^2 - x + k) = 0$$

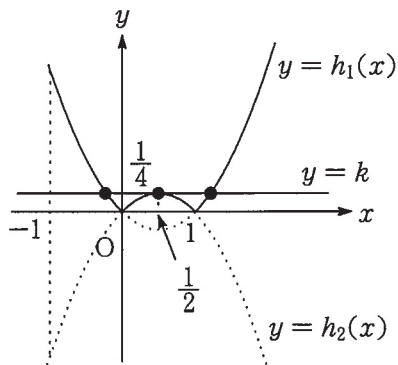
$$x = -1, k = -x^2 + x$$

よって、 $h_1(x) = x^2 - x, h_2(x) = -x^2 + x$ とおくと、

$$h_1(x) = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}, h_2(x) = -\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4}$$

より、(**)を満たす条件は

$y = k, y = h_1(x) (-1 \leq x \leq 0, 1 \leq x), y = h_2(x) (x \leq -1, 0 \leq x \leq 1)$ が $x \neq -1$ の範囲で異なる3つの共有点をもつことであり、



図より、 $k = \frac{1}{4}$ ……(答)

2.

(1)

$$\begin{aligned} a_n &= \sqrt{n^2 + 1} - n \\ &= \frac{1}{\sqrt{n^2 + 1} + n} \dots\dots ① \end{aligned}$$

n は自然数より, $\sqrt{n^2 + 1} + n > 1$ であるから, $0 < a_n < 1$ が成り立つ。

(証明終わり)

(2)

$$\begin{aligned} 3n - \frac{1}{a_n} &= 3n - \frac{1}{\sqrt{n^2 + 1} - n} \\ &= 3n - (\sqrt{n^2 + 1} + n) \\ &= 2n - \sqrt{n^2 + 1} \\ &= n - a_n \\ &= n - 1 + (1 - a_n) \end{aligned}$$

(1) より, $0 < 1 - a_n < 1$ となるから, $\left(3n - \frac{1}{a_n}\right)$ を超えない最大の整数は $n - 1$ である。

よって,

$$\begin{aligned} b_n &= 3n - \frac{1}{a_n} - (n - 1) \\ &= 1 - a_n \dots\dots ② \\ &= 1 - (\sqrt{n^2 + 1} - n) \\ &= n + 1 - \sqrt{n^2 + 1} \dots\dots (\text{答}) \end{aligned}$$

(3)

自然数 n が増加すると, $\sqrt{n^2 + 1} + n$ も増加するので, ① より, 数列 $\{a_n\}$ は減少する。

したがって, m, n が異なる 2 つの自然数のとき, $a_m \neq a_n$ となり,

② より,

$$\begin{aligned} a_m + b_n &= a_m + (1 - a_n) \\ &= (a_m - a_n) + 1 \\ &\neq 1 \end{aligned}$$

である。

(証明終わり)

(3) (別解)

$$\begin{aligned}a_m + b_n &= \left(\sqrt{m^2 + 1} - m\right) + \left(n + 1 - \sqrt{n^2 + 1}\right) \\&= \frac{m^2 - n^2}{\sqrt{m^2 + 1} + \sqrt{n^2 + 1}} - m + n + 1 \\&= \frac{(m + n)(m - n)}{\sqrt{m^2 + 1} + \sqrt{n^2 + 1}} - (m - n) + 1 \\&= \left(\frac{m + n}{\sqrt{m^2 + 1} + \sqrt{n^2 + 1}} - 1\right)(m - n) + 1 \dots\dots\dots \textcircled{3}\end{aligned}$$

m, n は自然数であるから, $\sqrt{m^2 + 1} > m$, $\sqrt{n^2 + 1} > n$ となり,

$\frac{m + n}{\sqrt{m^2 + 1} + \sqrt{n^2 + 1}} < 1$ が成り立つ。

m, n は異なるので, $\left(\frac{m + n}{\sqrt{m^2 + 1} + \sqrt{n^2 + 1}} - 1\right)(m - n) \neq 0$ となり,

③ より, $a_m + b_n \neq 1$ である。

(証明終わり)

- (1)
- $f(\theta) = \sin \theta$
- ,
- $g(\theta) = \cos \theta + |\sin \theta|$
- とおくと

$$f(2\pi - \theta) = \sin(2\pi - \theta) = -\sin \theta = -f(\theta)$$

$$g(2\pi - \theta) = \cos(2\pi - \theta) + |\sin(2\pi - \theta)| = \cos \theta + |\sin \theta| = g(\theta)$$

ゆえに、曲線 C の $0 \leq \theta \leq \pi$ の部分と $\pi \leq \theta \leq 2\pi$ の部分は、 y 軸に関して対称である。

$0 \leq \theta \leq \pi$ において $x = \sin \theta$, $y = \cos \theta + \sin \theta$ であり

$$0 < \theta < \pi \text{ において } \frac{dx}{d\theta} = \cos \theta, \quad \frac{dy}{d\theta} = -\sin \theta + \cos \theta = \sqrt{2} \cos\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right)$$

よって、 θ に対しての x , y の増減は次のようになる。

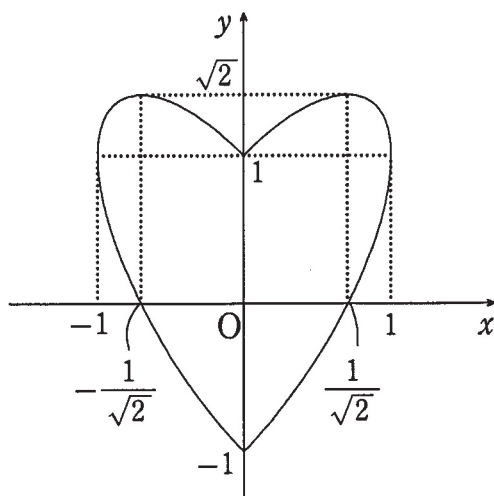
θ	0	...	$\frac{\pi}{4}$	...	$\frac{\pi}{2}$	...	π
$\frac{dx}{d\theta}$		+	+	+	0	-	
$\frac{dy}{d\theta}$		+	0	-	-	-	
x	0	↗	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	↗	1	↘	0
y	1	↗	$\sqrt{2}$	↘	1	↘	-1

また、

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{d\theta}}{\frac{dx}{d\theta}} = \frac{-\sin \theta + \cos \theta}{\cos \theta} = -\tan \theta + 1 \text{ より, } \lim_{\theta \rightarrow +0} \frac{dy}{dx} = 1, \quad \lim_{\theta \rightarrow \pi-0} \frac{dy}{dx} = 1.$$

$$y = 0 \text{ のとき } \theta = \frac{3}{4}\pi \text{ であり, このとき } x = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

であることに注意すると、 $0 \leq \theta \leq 2\pi$ においての曲線 C の概形は次のようになる。



.....(答)

- (2) 曲線 C で囲まれた部分の面積を S , $y_1 = g(\theta) \left(0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \right)$, $y_2 = g(\theta) \left(\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \pi \right)$ とすると

曲線 C は y 軸に関して対称であるから

$$\begin{aligned} \frac{S}{2} &= \int_0^1 y_1 dx - \int_0^1 y_2 dx \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos \theta + \sin \theta) \cos \theta d\theta - \int_{\pi}^{\frac{\pi}{2}} (\cos \theta + \sin \theta) \cos \theta d\theta \\ &= \int_0^{\pi} (\cos \theta + \sin \theta) \cos \theta d\theta \\ &= \int_0^{\pi} (\cos^2 \theta + \sin \theta \cos \theta) d\theta \\ &= \int_0^{\pi} \left(\frac{1 + \cos 2\theta}{2} + \frac{1}{2} \sin 2\theta \right) d\theta \end{aligned}$$

よって,

$$\begin{aligned} S &= \int_0^{\pi} (1 + \cos 2\theta + \sin 2\theta) d\theta \\ &= \left[\theta + \frac{1}{2} \sin 2\theta - \frac{1}{2} \cos 2\theta \right]_0^{\pi} \\ &= \pi \end{aligned} \quad \dots\dots(\text{答})$$

理系 4.

(1) 背理法で示す。

「3点 A, B, P が一直線上にある」とすると, k を実数として

$$\overrightarrow{AP} = k\overrightarrow{AB}$$

が成り立つ。したがって,

$$(s+4, t+1, -2s+t-1) = k(1, 1, -1)$$

すなわち

$$\begin{cases} s+4=k & \dots\dots ① \\ t+1=k & \dots\dots ② \\ -2s+t-1=-k & \dots\dots ③ \end{cases}$$

を同時に満たす実数 k が存在する。

このとき, ①より $s=k-4$, ②より $t=k-1$ であるから,

$$(③の左辺) = -2(k-4) + (k-1) - 1 = -k + 6$$

となるが, ③が成り立たず, ①, ②, ③を同時に満たす実数 k が存在することに矛盾する。

よって,

「3点 A, B, P は一直線上にない」

(証明終わり)

(2) 点 H は直線 AB 上の点であるから, l を実数として

$$\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OA} + l\overrightarrow{AB} = (-4, -1, 0) + l(1, 1, -1) = (l-4, l-1, -l) \quad \dots\dots ④$$

と表せる。PH ⊥ AB より

$$\overrightarrow{PH} \cdot \overrightarrow{AB} = 0 \quad \dots\dots ⑤$$

ここで, ④より

$$\begin{aligned} \overrightarrow{PH} &= \overrightarrow{OH} - \overrightarrow{OP} \\ &= (l-4, l-1, -l) - (s, t, -2s+t-1) \\ &= (l-s-4, l-t-1, -l+2s-t+1) \end{aligned} \quad \dots\dots ⑥$$

したがって

$$\begin{aligned} \overrightarrow{PH} \cdot \overrightarrow{AB} &= (l-s-4) \cdot 1 + (l-t-1) \cdot 1 + (-l+2s-t+1) \cdot (-1) \\ &= 3l-3s-6 \end{aligned}$$

となるから, ⑤より

$$3l-3s-6=0$$

すなわち

$$l = s+2 \quad \dots\dots ⑦$$

⑦を④に代入すると

$$\overrightarrow{OH} = (s-2, s+1, -s-2)$$

よって, 点 H の座標は

$$H(s-2, s+1, -s-2) \quad \dots\dots (答)$$

(3) PH ⊥ AB であり, A, B は定点であるから, 三角形 ABP の面積が最小となるのは,

PH が最小となるときである。

⑥, ⑦より, $\overrightarrow{PH} = (-2, s-t+1, s-t-1)$ であるから

$$\begin{aligned}
 PH &= |\overrightarrow{PH}| = \sqrt{(-2)^2 + (s-t+1)^2 + (s-t-1)^2} \\
 &= \sqrt{4 + (s-t)^2 + 2(s-t) + 1 + (s-t)^2 - 2(s-t) + 1} \\
 &= \sqrt{2(s-t)^2 + 6}
 \end{aligned}$$

よって、 $s=t$ のとき PH は最小値 $\sqrt{6}$ をとる。

$$AB = |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{1^2 + 1^2 + (-1)^2} = \sqrt{3}$$

であるから、三角形 ABP の面積の最小値は

$$\frac{1}{2} \cdot \sqrt{3} \cdot \sqrt{6} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$$

.....(答)

理系 5.

(1) $t > 1$ とするとき, $1 < x < t$ において,

$$f(x) - xf'(x) = 0 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

が成り立つとき,

$$\left\{ \frac{f(x)}{x} \right\}' = \frac{f'(x) \cdot x - f(x) \cdot 1}{x^2} = -\frac{f(x) - xf'(x)}{x^2} = 0 \quad (\textcircled{1} \text{より})$$

である。

また, $1 \leq x \leq t$ において, $\frac{f(x)}{x}$ は連続であるから, $\frac{f(x)}{x}$ は定数である。(証明終わり)

(2) $t \geq 1$ のとき,

$$g(t) = \sqrt{t^2 + \{f(t)\}^2}, \quad h(t) = \int_1^t \sqrt{1 + \{f'(x)\}^2} dx$$

であるから, $g(t) = h(t) + 2$ が成り立つとき,

$$\sqrt{t^2 + \{f(t)\}^2} = \int_1^t \sqrt{1 + \{f'(x)\}^2} dx + 2 \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

である。

②で $t = 1$ とすると,

$$\sqrt{1 + \{f(1)\}^2} = 2$$

この両辺を 2 乗して,

$$1 + \{f(1)\}^2 = 4 \quad \therefore \{f(1)\}^2 = 3$$

$x \geq 0$ のとき $f(x) \geq 0$ であるから,

$$f(1) = \sqrt{3} \quad \cdots \cdots \textcircled{3} \quad \cdots \cdots (\text{答})$$

次に, ②の両辺を t で微分すると,

$$\frac{2t + 2f(t)f'(t)}{2\sqrt{t^2 + \{f(t)\}^2}} = \sqrt{1 + \{f'(t)\}^2}$$

$$\therefore t + f(t)f'(t) = \sqrt{t^2 + \{f(t)\}^2} \sqrt{1 + \{f'(t)\}^2}$$

この両辺を 2 乗して,

$$\{t + f(t)f'(t)\}^2 = (t^2 + \{f(t)\}^2)(1 + \{f'(t)\}^2)$$

$$t^2 + 2tf(t)f'(t) + \{f(t)f'(t)\}^2 = t^2 + \{f(t)\}^2 + t^2\{f'(t)\}^2 + \{f(t)\}^2\{f'(t)\}^2$$

$$\{f(t)\}^2 - 2tf(t)f'(t) + t^2\{f'(t)\}^2 = 0$$

$$\{f(t) - tf'(t)\}^2 = 0$$

$$\therefore f(t) - tf'(t) = 0$$

これが $t \geq 1$ で成り立つから、(1) により、 $t \geq 1$ において、 $\frac{f(t)}{t}$ は定数である。

よって、

$$\frac{f(t)}{t} = \frac{f(1)}{1} = \sqrt{3} \quad (\text{③より})$$

$$\therefore f(t) = \sqrt{3}t \quad \dots\dots (\text{答})$$