

2025年度 神戸大学 前期 数学 文系

1.

(1) $f(x) = 0$ が $x = -1$ を解にもつので

$$f(-1) = -2 + a - 1 = 0$$

$$a = 3 \quad \dots\dots (\text{答})$$

このとき

$$\begin{aligned} f(x) &= 2x^3 + 3x^2 - 1 \\ &= (x+1)(2x^2 + x - 1) \\ &= (x+1)^2(2x-1) \end{aligned}$$

よって $f(x) = 0$ の解は

$$x = -1, \frac{1}{2} \quad \dots\dots (\text{答})$$

(2) $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 1$ より

$$\begin{aligned} f'(x) &= 6x^2 + 6x \\ &= 6x(x+1) \end{aligned}$$

これより $f(x)$ の増減は次の表の通り。

x	$\dots$	-1	$\dots$	0	$\dots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	極大	$\searrow$	極小	$\nearrow$

ゆえに

$$\begin{cases} f(x) \text{の極大値は} f(-1) = 0 \\ f(x) \text{の極小値は} f(0) = -1 \end{cases} \quad \dots\dots (\text{答})$$

(3) $f(x) = 2x^3 + ax^2 - 1$ より

$$\begin{aligned} f'(x) &= 6x^2 + 2ax \\ &= 2x(3x + a) \end{aligned}$$

ここで

i) $a = 0$ のとき

$$f'(x) = 6x^2 \geq 0$$

となって、 $f(x)$ は増加するので、 $f(x) = 0$ は異なる3つの実数解をもたない。

ii) $a \neq 0$ のとき

$f'(x)$ の符号は $x = 0$ 、 $-\frac{a}{3}$ で変化するので、 $f(x)$ は2つの極値 $f(0)$ と $f(-\frac{a}{3})$ をもつ。

2025年度 神戸大学 前期 数学 文系

よって3次方程式 $f(x) = 0$ が異なる3つの実数解をもつ条件は

$$f(0)f\left(-\frac{a}{3}\right) < 0$$

$$(-1)\left\{2\left(-\frac{a}{3}\right)^3 + a\left(-\frac{a}{3}\right)^2 - 1\right\} < 0$$

$$-\frac{1}{27}a^3 + 1 < 0$$

$$a^3 > 27$$

a は実数より

$$a > 3 \quad \dots\dots (\text{答})$$

2025年度 神戸大学 前期 数学 文系

文系 2.

$$(1) \quad (n+1)^2 - (\sqrt{n^2+1})^2 = n^2 + 2n + 1 - (n^2 + 1) \\ = 2n > 0$$

$$\text{よって } (\sqrt{n^2+1})^2 < (n+1)^2$$

$n \geq 1$ より, $\sqrt{n^2+1} > 0$, $n+1 > 0$ であるから

$$\sqrt{n^2+1} < n+1$$

$$\therefore a_n < n+1 \quad \dots\dots ① \quad (\text{証明終わり})$$

$$(2) \quad \sqrt{n^2+1} > n \text{ より}$$

$$a_n > n \quad \dots\dots ②$$

$$①, ② \text{ より } n < a_n < n+1$$

ゆえに, a_n を超えない最大の整数は n であるから

$$b_n = a_n - n$$

$$= \sqrt{n^2+1} - n \quad \dots\dots (\text{答})$$

(3) 異なる2つの自然数 m, n に対して, $b_m = b_n$ であると仮定すると, (2) より

$$\sqrt{m^2+1} - m = \sqrt{n^2+1} - n$$

$$\therefore \sqrt{m^2+1} - \sqrt{n^2+1} = m - n \quad \dots\dots ③ \quad \rightarrow \text{部分別解}$$

③の両辺を2乗すると

$$(\sqrt{m^2+1} - \sqrt{n^2+1})^2 = (m - n)^2$$

$$(m^2+1) - 2\sqrt{(m^2+1)(n^2+1)} + (n^2+1) = m^2 - 2mn + n^2$$

$$2 - 2\sqrt{(m^2+1)(n^2+1)} = -2mn$$

$$\therefore mn + 1 = \sqrt{(m^2+1)(n^2+1)}$$

さらに, 両辺を2乗すると

$$(mn+1)^2 = (m^2+1)(n^2+1)$$

$$m^2n^2 + 2mn + 1 = m^2n^2 + m^2 + n^2 + 1$$

$$m^2 - 2mn + n^2 = 0$$

$$(m - n)^2 = 0$$

$$\therefore m = n$$

これは $m \neq n$ であることに矛盾するので, $b_m \neq b_n$ である。(証明終わり)

部分別解

$$\begin{aligned} \sqrt{m^2+1} - \sqrt{n^2+1} &= \frac{(\sqrt{m^2+1})^2 - (\sqrt{n^2+1})^2}{\sqrt{m^2+1} + \sqrt{n^2+1}} \\ &= \frac{m^2 - n^2}{\sqrt{m^2+1} + \sqrt{n^2+1}} = \frac{(m+n)(m-n)}{\sqrt{m^2+1} + \sqrt{n^2+1}} \end{aligned}$$

さらに, $m \neq n$ であるから, ③は

$$\frac{m+n}{\sqrt{m^2+1} + \sqrt{n^2+1}} = 1 \quad \dots\dots ④$$

ここで, $\sqrt{m^2+1} > m$, $\sqrt{n^2+1} > n$ より

$$\frac{m+n}{\sqrt{m^2+1} + \sqrt{n^2+1}} < \frac{m+n}{m+n} = 1 \quad \dots\dots ⑤$$

④と⑤は矛盾するので, $b_m \neq b_n$ である。(証明終わり)

2025年度 神戸大学 前期 数学 文系

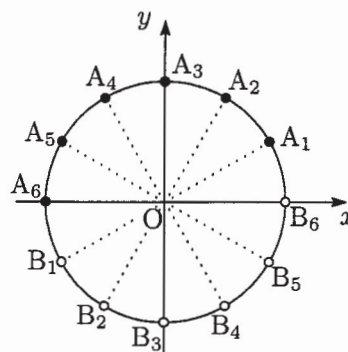
3.

$a = 1, 2, \dots, 6$ に対応する点をそれぞれ $A_1, A_2, \dots, A_6$

$b = 1, 2, \dots, 6$ に対応する点をそれぞれ $B_1, B_2, \dots, B_6$

とすると、図のようになり、原点を中心とする半径 1 の円周を 12 等分する.

また、2 回のさいころの目の出方は全部で 6^2 通りあり、これらは同様に確からしい.



(1) 3 点 O, A, B が一直線上にある条件は $a = b$ の 6 通りであるから、求める確率は

$$\frac{6}{6^2} = \frac{1}{6} \quad \dots\dots (\text{答})$$

(2) 三角形 OAB の面積を S とすると、

$$S = \frac{1}{2} \cdot OA \cdot OB \cdot \sin \angle AOB = \frac{1}{2} \sin \angle AOB$$

3 点 O, A, B が一直線上にないことと、 $S \leq \frac{1}{4}$ であるから、 $\sin \angle AOB \leq \frac{1}{2}$ であることより、

$$0 < \angle AOB \leq \frac{\pi}{6}, \quad \frac{5}{6}\pi \leq \angle AOB < \pi$$

図より、これを満たす a, b の組合せは以下の表のようになり、12 通りある.

a	1	1	2	2	3	3	4	4	5	5	6	6
b	2	6	1	3	2	4	3	5	4	6	1	5

よって、求める確率は

$$\frac{12}{6^2} = \frac{1}{3} \quad \dots\dots (\text{答})$$

(3) 余事象「2 点 A, B 間の距離が 1 以下」である条件を考える. 三角形 OAB で余弦定理より、

$$AB^2 = OA^2 + OB^2 - 2 \cdot OA \cdot OB \cos \angle AOB = 2 - 2 \cos \angle AOB$$

$AB^2 \leq 1$ であるから、 $\cos \angle AOB \geq \frac{1}{2}$ であることより、

$$\angle AOB \leq \frac{\pi}{3}$$

図より、これを満たす a, b の組合せは以下の表のようになり、6 通りある.

a	1	1	2	5	6	6
b	5	6	6	1	1	2

よって、求める確率は

$$1 - \frac{6}{6^2} = \frac{5}{6} \quad \dots\dots (\text{答})$$