

2025年度 京都大学 前期 数学 理系

1

問 1

$$L = \left| z - \frac{i}{z} \right| = \frac{|z^2 - i|}{|z|} = \frac{1}{2} |z^2 - i|$$

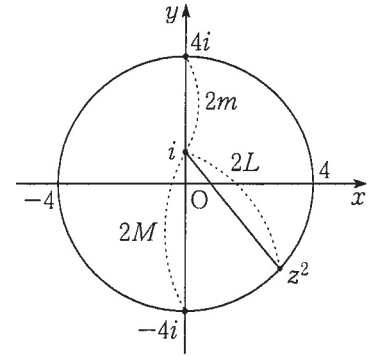
$$= \frac{1}{2} (\text{点 } z^2 \text{ と点 } i \text{ の距離})$$

とする.

$$|z| = 2 \quad \therefore |z^2| = 4$$

より, 点 z^2 は中心が点 O , 半径 4 の円周全体を動くので, 求める最大値 M , 最小値 m は右図より

$$2M = 5, \quad 2m = 3 \quad \therefore M = \frac{5}{2}, \quad m = \frac{3}{2} \quad \cdots \cdots (\text{答})$$



1

問 2

$$(1) \quad \frac{x\sqrt{x^2+1}+2x^3+1}{x^2+1} = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} + \frac{2x(x^2+1)-2x+1}{x^2+1}$$

$$= \frac{1}{2}(x^2+1)^{-\frac{1}{2}}(x^2+1)' + 2x - \frac{(x^2+1)'}{x^2+1} + \frac{1}{x^2+1}$$

だから、 $I = \int_0^{\sqrt{3}} \frac{1}{x^2+1} dx$ として

$$\text{与式} = \left[(x^2+1)^{\frac{1}{2}} + x^2 - \log(x^2+1) \right]_0^{\sqrt{3}} + I$$

$$= (2+3-\log 4) - 1 + I = 4 - 2\log 2 + I$$

I において、 $x = \tan \theta \left(-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2} \right)$ とおくと

x	$0 \rightarrow \sqrt{3}$
θ	$0 \rightarrow \frac{\pi}{3}$

$$\frac{1}{x^2+1} = \frac{1}{\tan^2 \theta + 1} = \cos^2 \theta \quad \frac{dx}{d\theta} = \frac{1}{\cos^2 \theta}$$

だから $I = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \cos^2 \theta \frac{dx}{d\theta} d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{3}} d\theta = \frac{\pi}{3}$ となり

$$\text{与式} = 4 - 2\log 2 + \frac{\pi}{3} \dots\dots(\text{答})$$

$$(2) \quad \frac{1-\cos x}{1+\cos x} = \frac{(1-\cos x)(1+\cos x)}{(1+\cos x)^2} = \frac{1-\cos^2 x}{(1+\cos x)^2}$$

$$= \frac{\sin^2 x}{(1+\cos x)^2}$$

だから

$$\text{与式} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left| \frac{\sin x}{1+\cos x} \right| dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{1+\cos x} dx$$

$$= - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(1+\cos x)'}{1+\cos x} dx = - \left[\log(1+\cos x) \right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \log 2 \dots\dots(\text{答})$$

2

文字はすべて整数とし、 $\text{mod } 3$ とする.

$$n \equiv 0 \text{ ならば } n^2 \equiv 0$$

$$n \equiv \pm 1 \text{ ならば } n^2 \equiv 1$$

だから

$$9z^2 = x^6 + y^4 \quad \therefore (x^3)^2 + (y^2)^2 \equiv 0$$

をみたすのは

$$x^3 \equiv y^2 \equiv 0 \quad \therefore x \equiv y \equiv 0$$

のときに限る. そこで, $x = 3p$, $y = 3q$ とおくと

$$9z^2 = 3^6 p^6 + 3^4 q^4 \quad \therefore z^2 = 3^2(3^2 p^6 + q^4)$$

このとき, $z = 3r$ とかけて

$$3^2 r^2 = 3^2(3^2 p^6 + q^4) \quad \therefore r^2 = 3^2 p^6 + q^4$$

$p = 1$ のとき, $r^2 = 3^2 + q^4$

$$\bullet q = 1 \text{ のとき, } r^2 = 10$$

$$\bullet q = 2 \text{ のとき, } r^2 = 25 \quad \therefore r = 5$$

$p \geq 2$ のとき, $r^2 > 3^2 \cdot 2^6 > 5^2$ だから,

$r = 5$ が正の整数 r の最小解である.

よって, 求める N の最小値は

$$N = 9 \cdot (3 \cdot 5)^2 = 2025 \dots\dots(\text{答})$$

3

$f(x) = x^2 \log x$ より, $f'(x) = x(2 \log x + 1)$ である.

直線 l_t はベクトル $(1, f'(t))$ に垂直で, 点 $(t, g(t))$ を通るから, l_t の方程式は

$$1 \cdot (x - t) + f'(t)\{y - g(t)\} = 0$$

である. 直線 l_t が点 $(p(t), 0)$ を通ることから,

$$p(t) - t - f'(t)g(t) = 0$$

が成り立ち, これより,

$$\begin{aligned} p(t) &= t + f'(t)g(t) \\ &= t + t(2 \log t + 1) \left(t^2 \log t - \frac{1}{1 + 2 \log t} \right) \\ &= t^3 \{ 2(\log t)^2 + \log t \} \end{aligned}$$

である. したがって,

$$\begin{aligned} p'(t) &= 3t^2 \{ 2(\log t)^2 + \log t \} + t^3 \left(4 \log t \cdot \frac{1}{t} + \frac{1}{t} \right) \\ &= t^2 \{ 6(\log t)^2 + 7 \log t + 1 \} \\ &= t^2 (\log t + 1)(6 \log t + 1) \end{aligned}$$

であり, $\frac{1}{\sqrt{e}} < t \leq e$ における $p(t)$ の増減は次の表のようになる.

t	$\left(\frac{1}{\sqrt{e}} \right)$	$\dots$	$e^{-\frac{1}{6}}$	$\dots$	e
$p'(t)$		$-$	0	$+$	
$p(t)$	(0)	$\searrow$	$-\frac{1}{9\sqrt{e}}$	$\nearrow$	$3e^3$

ゆえに, $p(t)$ $\left(\frac{1}{\sqrt{e}} < t \leq e \right)$ の取りうる値の範囲は

$$-\frac{1}{9\sqrt{e}} \leq p(t) \leq 3e^3 \quad \dots\dots (答)$$

である.

$$(1) \overrightarrow{OX} = \frac{1}{4}\overrightarrow{OA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{OB} + \frac{3}{4}\overrightarrow{OC}$$

となる点 X を定めると、この定め方により、点 X は s, t, u に無関係な一定の点である。また、

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OX} &= \frac{1}{4s} \cdot s\overrightarrow{OA} + \frac{1}{2t} \cdot t\overrightarrow{OB} + \frac{3}{4u} \cdot u\overrightarrow{OC} \\ &= \frac{1}{4s}\overrightarrow{OL} + \frac{1}{2t}\overrightarrow{OM} + \frac{3}{4u}\overrightarrow{ON}\end{aligned}$$

とも表せて、 $\frac{1}{s} + \frac{2}{t} + \frac{3}{u} = 4$ より、 $\frac{1}{4s} + \frac{1}{2t} + \frac{3}{4u} = 1$ であるから、点 X は平面 LMN 上にある。

3 点 L, M, N はそれぞれ直線 OA, OB, OC 上の O 以外の部分を動くので、 $\frac{1}{s} + \frac{2}{t} + \frac{3}{u} = 4$ ……① を満たす実数 s, t, u の組 (s, t, u) が異なれば、平面 LMN は異なる。① を満たす (s, t, u) として、 $(1, 1, 3), (1, \frac{4}{3}, 2)$ を考え、各場合の平面 LMN をそれぞれ α, β とおくと、2 平面 α, β は異なり、いずれも点 A を通るので、 α, β は平行でない。したがって、 α, β の交線 ℓ が存在し、 α, β はいずれも 2 点 A, X を通るから、 ℓ は直線 AX となる。① を満たす (s, t, u) として、 $(1, 1, 3), (2, 1, 2)$ のときの 2 平面についても同様に考えると交線は直線 BX となり、2 直線 AX, BX の共通部分は点 X のみである。

したがって、 s, t, u が $\frac{1}{s} + \frac{2}{t} + \frac{3}{u} = 4$ を満たす範囲であらゆる値をとるとき、平面 LMN の共通部分の点は点 X のみであり、これが題意の P であるから、P はただ 1 つに定まる。 (証明終わり)

【別解】

4 点 O, A, B, C は同一平面上にないので、実数 x, y, z を用いて、

$$\overrightarrow{OP} = x\overrightarrow{OA} + y\overrightarrow{OB} + z\overrightarrow{OC}$$

と表せる。このとき、

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OP} &= \frac{x}{s} \cdot s\overrightarrow{OA} + \frac{y}{t} \cdot t\overrightarrow{OB} + \frac{z}{u} \cdot u\overrightarrow{OC} \\ &= \frac{x}{s}\overrightarrow{OL} + \frac{y}{t}\overrightarrow{OM} + \frac{z}{u}\overrightarrow{ON}\end{aligned}$$

と表せて、4 点 O, A, B, C が同一平面上にないので、点 P が平面 LMN 上にある条件は、

$$\frac{x}{s} + \frac{y}{t} + \frac{z}{u} = 1 \quad \dots\dots②$$

である。したがって、

「 $\frac{1}{s} + \frac{2}{t} + \frac{3}{u} = 4$ を満たすすべての実数 s, t, u で、点 P が平面 LMN 上にある」

条件は

「 $\frac{1}{s} + \frac{2}{t} + \frac{3}{u} = 4$ を満たすすべての実数 s, t, u で、② が成り立

つ」

ことであり、

「 $\frac{2}{t} + \frac{3}{u} \neq 4$ を満たすすべての実数 t, u で、

$$\left(4 - \frac{2}{t} - \frac{3}{u}\right)x + \frac{y}{t} + \frac{z}{u} = 1$$

つまり、

「 $\frac{2}{t} + \frac{3}{u} \neq 4$ を満たすすべての実数 t, u で、

$$(4x - 1) + \frac{y - 2x}{t} + \frac{z - 3x}{u} = 0$$

となる。したがって、

$$4x - 1 = 0 \text{ かつ } y - 2x = 0 \text{ かつ } z - 3x = 0$$

となり、

$$(x, y, z) = \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right)$$

である。したがって、平面 LMN が通る s, t, u に無関係な点 P は

$$\overrightarrow{OP} = \frac{1}{4}\overrightarrow{OA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{OB} + \frac{3}{4}\overrightarrow{OC}$$

で定められる点 P ただ 1 つである。

(証明終わり)

(2) (1) の P に対して、

$$\frac{2}{3}\overrightarrow{OP} = \frac{\overrightarrow{OA} + 2\overrightarrow{OB} + 3\overrightarrow{OC}}{6} \quad \dots\dots ③$$

と表せて、このベクトルを $\overrightarrow{OD}$ とおく。③ の左辺から点 D は直線 OP 上であり、③ の右辺から平面 ABC 上にもあるので、点 D は直線 OP と平面 ABC の共有点である。このとき、 $\overrightarrow{OD} = \frac{3}{2}\overrightarrow{OP}$ より、 $OD : DP = 2 : 1$ であり、2 点 O, P から平面 ABC に下ろした垂線の足をそれぞれ H, I とおくと、

$$OH : PI = OD : DP = 2 : 1$$

である。四面体 PABC と四面体 OABC は三角形 ABC が共通なので、求める体積は

$$\frac{PI}{OH} V$$

つまり

$$\frac{1}{2} V$$

である。

$\dots\dots$ (答)

5

点 Q は直線 AP 上にあるから

$$\overrightarrow{AQ} = k\overrightarrow{AP} \quad (k \text{ は実数})$$

と表せる。このとき

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OQ} &= \overrightarrow{OA} + k\overrightarrow{AP} \\ &= \left(0, 0, \frac{\sqrt{2}}{4}\right) + k \left(\cos \theta, \sin \theta, \frac{1}{2} \cos \theta - \frac{\sqrt{2}}{4}\right) \\ &= \left(k \cos \theta, k \sin \theta, \frac{\sqrt{2}}{4} + k \left(\frac{1}{2} \cos \theta - \frac{\sqrt{2}}{4}\right)\right) \end{aligned}$$

また、点 Q は xy 平面上にあるから $\frac{\sqrt{2}}{4} + k \left(\frac{1}{2} \cos \theta - \frac{\sqrt{2}}{4}\right) = 0$

よって $(1 - \sqrt{2} \cos \theta) k = 1$

$-\frac{\pi}{4} < \theta < \frac{\pi}{4}$ のとき、 $1 - \sqrt{2} \cos \theta \neq 0$ であるから $k = \frac{1}{1 - \sqrt{2} \cos \theta}$

したがって $\overrightarrow{OQ} = \left(\frac{\cos \theta}{1 - \sqrt{2} \cos \theta}, \frac{\sin \theta}{1 - \sqrt{2} \cos \theta}, 0\right)$

よって $Q \left(\frac{\cos \theta}{1 - \sqrt{2} \cos \theta}, \frac{\sin \theta}{1 - \sqrt{2} \cos \theta}, 0\right)$

θ が $-\frac{\pi}{4} < \theta < \frac{\pi}{4}$ の範囲を動くときの点 Q の軌跡を C とすると

$$(x, y) \in C \iff \begin{cases} x = \frac{\cos \theta}{1 - \sqrt{2} \cos \theta} \\ y = \frac{\sin \theta}{1 - \sqrt{2} \cos \theta} \\ -\frac{\pi}{4} < \theta < \frac{\pi}{4} \end{cases} \quad \text{を満たす実数} \theta \text{ が存在する.}$$

ここで、 $x = \frac{\cos \theta}{1 - \sqrt{2} \cos \theta}$ より $(\sqrt{2}x + 1) \cos \theta = x$

$x = -\frac{1}{\sqrt{2}}$ はこの等式を満たさないから、 $\sqrt{2}x + 1 \neq 0$ より $\cos \theta = \frac{x}{\sqrt{2}x + 1}$

また、 $-\frac{\pi}{4} < \theta < \frac{\pi}{4}$ のとき、 $\cos \theta \neq 0$ であるから $x \neq 0$

したがって $\tan \theta = \frac{y}{x}$

よって

$$\begin{cases} x = \frac{\cos \theta}{1 - \sqrt{2} \cos \theta} \\ y = \frac{\sin \theta}{1 - \sqrt{2} \cos \theta} \\ -\frac{\pi}{4} < \theta < \frac{\pi}{4} \end{cases} \iff \begin{cases} \cos \theta = \frac{x}{\sqrt{2}x + 1} & \dots\dots ① \\ \tan \theta = \frac{y}{x} & \dots\dots ② \\ -\frac{\pi}{4} < \theta < \frac{\pi}{4} & \dots\dots ③ \end{cases}$$

① かつ ② かつ ③ を満たす実数 θ が存在するための条件は

$$\begin{cases} 1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2 = \frac{1}{\left(\frac{x}{\sqrt{2}x+1}\right)^2} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} < \frac{x}{\sqrt{2}x+1} \end{cases}$$

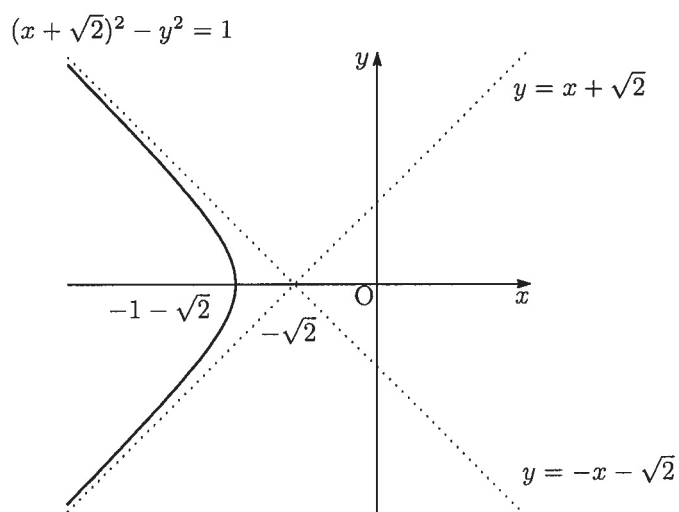
すなわち

$$\begin{cases} (x + \sqrt{2})^2 - y^2 = 1 \\ x < -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases}$$

ゆえに、点 Q の軌跡は

双曲線 $(x + \sqrt{2})^2 - y^2 = 1$ の $x \leq -1 - \sqrt{2}$ の部分 ……(答)

であり、これを図示すると図のようになる。



6 事象 E の確率を $P(E)$ で表す.

$n \geq 2$ に対して

$$a_n = P(Y_n \text{が奇数 かつ } X_n = 1)$$

$$b_n = P(Y_n \text{が奇数 かつ } X_n = 0)$$

$$c_n = P(Y_n \text{が偶数 かつ } X_n = 1)$$

と定める. $Y_{n+1} = Y_n + X_n X_{n+1}$ であるから, $X_{n+1} = 1, 0$ に応じて

$$\begin{cases} a_{n+1} = \frac{1}{2}b_n + \frac{1}{2}c_n & \cdots \cdots \textcircled{1} \\ b_{n+1} = \frac{1}{2}a_n + \frac{1}{2}b_n & \cdots \cdots \textcircled{2} \end{cases} \quad (n \geq 2)$$

が得られる. $a_n + c_n = P(X_n = 1) = \frac{1}{2}$ であることに注意すると, $\textcircled{1} + \textcircled{2}$ および $\textcircled{2}$ より

$$\begin{aligned} a_{n+2} + b_{n+2} &= \frac{1}{2}(a_{n+1} + c_{n+1}) + b_{n+1} \\ &= \frac{1}{4} + \frac{1}{2}(a_n + b_n) \end{aligned}$$

$p_n = a_n + b_n$ だから

$$p_{n+2} = \frac{1}{2}p_n + \frac{1}{4} \quad \therefore \quad p_{n+2} - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}\left(p_n - \frac{1}{2}\right)$$

が成り立つ. 自然数 m を用いて, $n = 2m, 2m+1$ のとき

$$\begin{cases} p_{2m+2} - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}\left(p_{2m} - \frac{1}{2}\right) \\ p_{2m+3} - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}\left(p_{2m+1} - \frac{1}{2}\right) \end{cases}$$

$p_2 = p_3 = \frac{1}{4}$ であることに注意して,

$$\begin{cases} p_{2m} = \frac{1}{2} + \left(p_2 - \frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)^{m-1} = \frac{1}{2} - \left(\frac{1}{2}\right)^{m+1} \\ p_{2m+1} = \frac{1}{2} + \left(p_3 - \frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)^{m-1} = \frac{1}{2} - \left(\frac{1}{2}\right)^{m+1} \end{cases}$$

まとめると

$$p_n = \begin{cases} \frac{1}{2} - \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{n}{2}+1} & (n \text{ は偶数}) \\ \frac{1}{2} - \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{n+1}{2}} & (n \text{ は奇数}) \end{cases} \cdots \cdots (\text{答})$$