

2025年度 京都大学 前期 数学 文系

1

問 1

$2025^x = 3^y = 5^z$ より, $x \log_3 2025 = y = z \log_3 5$ であるから,

$$2xy = 2xz \log_3 5$$

$$yz = x (\log_3 2025) z$$

となり,

$$\begin{aligned} 2xy + 4xz - yz &= 2xz \log_3 5 + 4xz - xz \log_3 2025 \\ &= xz (\log_3 5^2 + \log_3 3^4 - \log_3 2025) \\ &= xz (\log_3 2025 - \log_3 2025) \\ &= 0 \end{aligned}$$

(証明終わり)

問 2:

$$N = \frac{n^4 + 6n^2 + 23}{n^2 + n + 3}$$

として、 N が整数となるような正の整数 n を求める。

多項式 $x^4 + 6x^2 + 23$ を $x^2 + x + 3$ で割ると、商は $x^2 - x + 4$ 、余りは $-x + 11$ であるから、

$$n^4 + 6n^2 + 23 = (n^2 + n + 3)(n^2 - n + 4) - n + 11 \quad \dots\dots ①$$

が成り立つ。 $n > 0$ より $n^2 + n + 3 > 0$ であるから、①の両辺を $n^2 + n + 3$ で割ると、

$$N = n^2 - n + 4 + \frac{-n + 11}{n^2 + n + 3}$$

となる。 $n^2 - n + 4$ は整数であるから

$$M = \frac{-n + 11}{n^2 + n + 3}$$

として、 M が整数となるような正の整数 n を求める。

$n = 11$ のとき、 $M = 0$ である。

$n \neq 11$ のとき、 $M \neq 0$ であるから、

$$|M| \geq 1 \quad \text{すなわち} \quad |-n + 11| \geq n^2 + n + 3$$

が必要であり、 $n^2 + n + 3 > 0$ より、

$$-n + 11 \leq -(n^2 + n + 3) \quad \text{または} \quad n^2 + n + 3 \leq -n + 11$$

$$\therefore n^2 \leq -14 \quad \text{または} \quad (n + 4)(n - 2) \leq 0$$

これを満たす正の整数 n は $n = 1, 2$ のみであり

$$n = 1 \text{ のとき } M = 2, \quad n = 2 \text{ のとき } M = 1$$

である。

以上より、求める n は

$$n = 1, 2, 11 \quad \dots\dots\dots (\text{答})$$

2

$$\frac{1}{8}x^4 + ax^3 + bx^2 = f(f(x)) + c \dots\dots\dots ①$$

p を 0 でない実数, q, r を実数として, 2 次式 $f(x)$ を,

$$f(x) = px^2 + qx + r$$

とおくと,

$$\begin{aligned} f(f(x)) &= p\{f(x)\}^2 + qf(x) + r \\ &= p(px^2 + qx + r)^2 + q(px^2 + qx + r) + r \\ &= p^3x^4 + 2p^2qx^3 + (2p^2r + pq^2 + pq)x^2 + (2pqr + q^2)x + (pr^2 + qr + r) \end{aligned}$$

である。よって, ①の両辺の係数を比較すると,

$$\begin{cases} \frac{1}{8} = p^3 & \dots\dots\dots ② \\ a = 2p^2q & \dots\dots\dots ③ \\ b = 2p^2r + pq^2 + pq & \dots\dots\dots ④ \\ 0 = 2pqr + q^2 & \dots\dots\dots ⑤ \\ 0 = pr^2 + qr + r + c & \dots\dots\dots ⑥ \end{cases}$$

であるから, ②~⑥を満たす実数 p, q, r, c が存在するような a, b の条件を求めればよい。

②より $p = \frac{1}{2}$ であるから p は存在する。このとき③より

$$q = 2a \quad \dots\dots\dots ⑦$$

であるから q も存在する。また, ⑥より p, q, r が存在すれば c も存在する。

よって, ④, ⑤, ⑦より

$$\begin{cases} r = 2b - (4a^2 + 2a) & \dots\dots\dots ⑧ \\ 0 = 2a(r + 2a) & \dots\dots\dots ⑨ \end{cases}$$

を満たす実数 r が存在するような a, b の条件を求めればよい。

$a = 0$ のとき⑨は成立し、⑧は

$$r = 2b$$

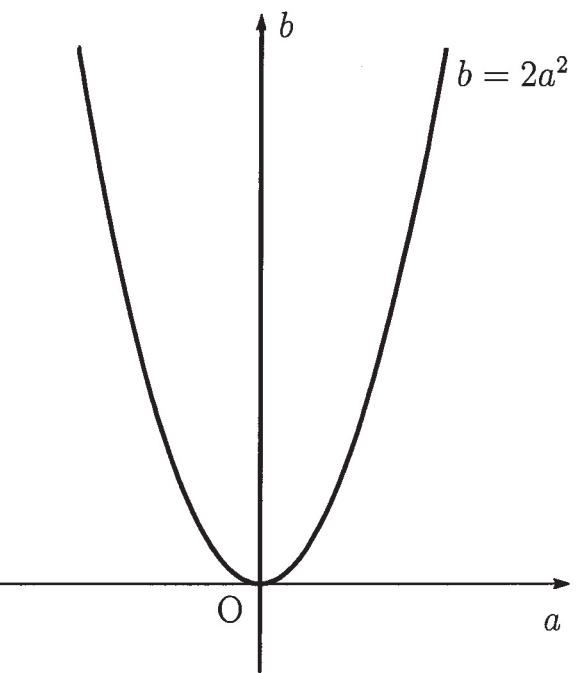
となるから、任意の実数 b に対して r が存在する。

$a \neq 0$ のとき、⑨より $r = -2a$ であるから、
 r が存在する条件は、これと⑧より

$$b = 2a^2$$

である。

以上より、求める点 (a, b) 全体の集合を座標平面上
に図示すると、次の図の太線部分のようになる。



3

記録された数を順に $a_1, a_2, \dots, a_n$ とし n 桁の数 X を X_n とする. すなわち

$$X_n = 10^{n-1}a_1 + 10^{n-2}a_2 + \dots + 10a_{n-1} + a_n$$

である.

$n \geq 2$ のとき X_n が 6 の倍数となるのは $a_1 + a_2 + \dots + a_n (= S_n \text{ とおく})$ が 3 の倍数であり, かつ $a_n = 2$ のときである. 以下 3 を法とする合同式を用いる.

$10 \equiv 1$ だから

$$X_{n-1} \equiv 1^{n-1} \cdot a_1 + 1^{n-2} \cdot a_2 + \dots + 1 \cdot a_{n-1} = S_{n-1}$$

である. したがって, X_n が 6 の倍数となる条件は, $S_{n-1} \equiv 1$ かつ $a_n = 2$ となることである.

そこで $S_n \equiv 0, 1, 2$ となる確率をそれぞれ p_n, q_n, r_n とおく. $S_{n+1} \equiv 1$ となるのは「 $S_n \equiv 0$ かつ $a_{n+1} = 1$ 」または「 $S_n \equiv 2$ かつ $a_{n+1} = 2$ 」のときだから

$$\begin{aligned} q_{n+1} &= \frac{1}{2}p_n + \frac{1}{2}r_n = \frac{1}{2}(p_n + r_n) \\ &= \frac{1}{2}(1 - q_n) \quad (p_n + q_n + r_n = 1 \text{ より}) \\ \therefore q_{n+1} - \frac{1}{3} &= -\frac{1}{2}\left(q_n - \frac{1}{3}\right) \end{aligned}$$

これと $q_1 = \frac{1}{2}$ より

$$q_n - \frac{1}{3} = \left(q_1 - \frac{1}{3}\right)\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} \quad \therefore q_n = \frac{1}{3} - \frac{1}{3} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^n$$

求める確率は $n = 1$ のとき 0, $n \geq 2$ のとき

$$q_{n-1} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{6} - \frac{1}{6} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

である. ①は $n = 1$ のときも成立するので, まとめて

$$\frac{1}{6} \left(1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right) \quad \dots\dots (\text{答})$$

$$\boxed{4} \quad (1) \quad C_1 : y = \begin{cases} x^2 - 2x & (x \geq 0) \\ x^2 + 2x & (x < 0) \end{cases}$$

$$y = x^2 - 5x + \frac{7}{4} \text{ より } y' = 2x - 5$$

よって、点 $\left(t, t^2 - 5t + \frac{7}{4}\right)$ における C_2 の接線の方程式は

$$y - \left(t^2 - 5t + \frac{7}{4}\right) = (2t - 5)(x - t)$$

$$\therefore y = (2t - 5)x - t^2 + \frac{7}{4} \quad \dots\dots ①$$

① が点 $(0, 0)$ と異なる点で C_1 と接する条件は

$$\text{「 } x^2 - 2x = (2t - 5)x - t^2 + \frac{7}{4} \text{ が } x > 0 \text{ の範囲で重解をもつ」} \quad \dots\dots (A)$$

または

$$\text{「 } x^2 + 2x = (2t - 5)x - t^2 + \frac{7}{4} \text{ が } x < 0 \text{ の範囲で重解をもつ」} \quad \dots\dots (B)$$

(A) のとき

$$x^2 - (2t - 3)x + t^2 - \frac{7}{4} = 0 \quad \dots\dots ②$$

が重解をもつので、(②の判別式)=0 より

$$(2t - 3)^2 - 4\left(t^2 - \frac{7}{4}\right) = 0$$

$$4t^2 - 12t + 9 - 4t^2 + 7 = 0$$

$$\therefore t = \frac{4}{3}$$

このとき、②の重解は

$$x = \frac{2t - 3}{2} = -\frac{1}{6}$$

これは $x > 0$ を満たさず不適.

(B) のとき

$$x^2 - (2t - 7)x + t^2 - \frac{7}{4} = 0 \quad \dots\dots ③$$

が重解をもつので、(③の判別式)=0 より

$$(2t - 7)^2 - 4\left(t^2 - \frac{7}{4}\right) = 0$$

$$4t^2 - 28t + 49 - 4t^2 + 7 = 0$$

$$\therefore t = 2$$

このとき、③の重解は

$$x = \frac{2t - 7}{2} = -\frac{3}{2}$$

これは $x < 0$ を満たす.

以上より、「(A) または (B)」を満たす t の値は一つだけ存在するから、

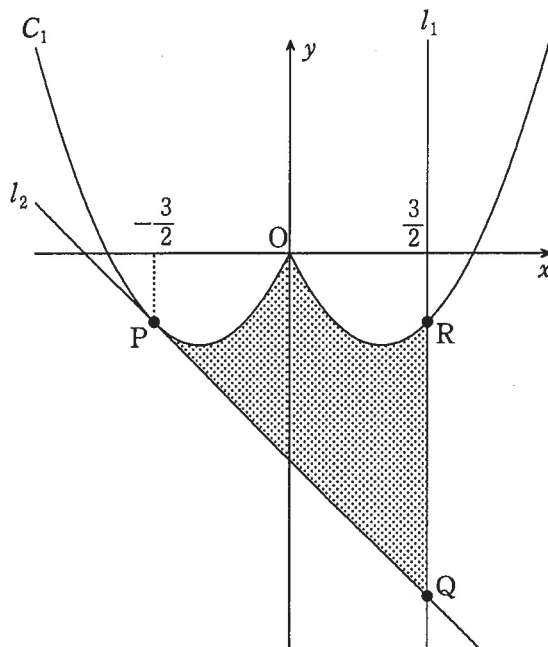
① より直線 l_2 もただ一つ存在する. (証明終わり)

(2) (1) より, $\alpha = -\frac{3}{2}$ である.

l_2 の方程式は, ① で $t=2$ として

$$y = -x - \frac{9}{4}$$

よって, 題意の図形は下図の網目部分となる.



ゆえに, 求める面積は

$$\begin{aligned} & \int_{-\frac{3}{2}}^0 \left\{ (x^2 + 2x) - \left(-x - \frac{9}{4} \right) \right\} dx + \int_0^{\frac{3}{2}} \left\{ (x^2 - 2x) - \left(-x - \frac{9}{4} \right) \right\} dx \\ &= \int_{-\frac{3}{2}}^{\frac{3}{2}} \left(x^2 + x + \frac{9}{4} \right) dx + \int_{-\frac{3}{2}}^0 2x dx - \int_0^{\frac{3}{2}} 2x dx \\ &= 2 \int_0^{\frac{3}{2}} \left(x^2 + \frac{9}{4} \right) dx - 2 \int_0^{\frac{3}{2}} 2x dx \\ &= 2 \left[\frac{1}{3} x^3 + \frac{9}{4} x \right]_0^{\frac{3}{2}} - 2 \left[x^2 \right]_0^{\frac{3}{2}} \\ &= \frac{9}{2} \quad \dots\dots (\text{答}) \end{aligned}$$

5

$\vec{OP} = \frac{1}{4}\vec{OA} + \frac{1}{2}\vec{OB} + \frac{3}{4}\vec{OC}$ によって定まる点 P をとると、点 P は s, t, u の値に無関係な一定の点である。さらに、

$$\begin{aligned}\vec{OP} &= \frac{1}{4s} \cdot s\vec{OA} + \frac{1}{2t} \cdot t\vec{OB} + \frac{3}{4u} \cdot u\vec{OC} \\ &= \frac{1}{4s}\vec{OL} + \frac{1}{2t}\vec{OM} + \frac{3}{4u}\vec{ON}\end{aligned}$$

であり、 $\frac{1}{s} + \frac{2}{t} + \frac{3}{u} = 4$ より $\frac{1}{4s} + \frac{1}{2t} + \frac{3}{4u} = 1$ であるから、点 P は平面 LMN 上にある。よって、平面 LMN は s, t, u の値に無関係な一定の点 P を通る。(証明終わり)