

2025年度 九州大学 前期 数学 理系

〔1〕

(1) 平面 α に垂直な直線 PQ の方向ベクトルの 1 本を $\vec{d} = (x, y, z)$ とすると,

$$\vec{d} \cdot \vec{AB} = 0 \text{ かつ } \vec{d} \cdot \vec{AC} = 0$$

が成立する。 $\vec{AB} = (-2, -2, 12)$, $\vec{AC} = (0, -2, 8)$ であるから,

$$\begin{cases} \vec{AB} \cdot \vec{d} = 0 \Leftrightarrow -2x - 2y + 12z = 0 & \therefore x = 6z - y \\ \vec{AC} \cdot \vec{d} = 0 \Leftrightarrow -2y + 8z = 0 & \therefore y = 4z \end{cases}$$

より, $x = 2z$, $y = 4z$ が成り立ち, $z = 1$ として, $\vec{d} = (2, 4, 1)$ ととることができる。

よって, P を通り平面 α に垂直な直線上かつ平面 $z = 0$ 上にある Q は

$$\begin{aligned} \vec{OQ} &= \vec{OP} - t\vec{d} \\ &= (a, b, t) - t(2, 4, 1) \\ &= (a - 2t, b - 4t, 0) \end{aligned}$$

よって, $Q(a - 2t, b - 4t, 0)$ (答)

$$\begin{aligned} (2) \quad |\vec{OQ}|^2 &= (a - 2t)^2 + (b - 4t)^2 \\ &= 20t^2 - 4(a + 2b)t + a^2 + b^2 \\ &= 20\left(t - \frac{a + 2b}{10}\right)^2 + a^2 + b^2 - \frac{(a + 2b)^2}{5} \end{aligned}$$

よって, $|\vec{OQ}|$ の最小値を F とすると,

$$\begin{aligned} F^2 &= a^2 + b^2 - \frac{(a + 2b)^2}{5} \\ &= \frac{4a^2 - 4ab + b^2}{5} \\ &= \frac{(b - 2a)^2}{5} \end{aligned}$$

いま, $F \leq 1$ つまり $F^2 \leq 1$ となるのは,

$$\frac{(b - 2a)^2}{5} \leq 1$$

$$-\sqrt{5} \leq b - 2a \leq \sqrt{5}$$

$\therefore 2a - \sqrt{5} \leq b \leq 2a + \sqrt{5}$ (答)

〔 2 〕

(1) $y = \tan x$ のとき,

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= \frac{1}{\cos^2 x} \\ &= 1 + \tan^2 x \\ &= y^2 + 1. \dots\dots\dots (\text{答})\end{aligned}$$

(2) $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\tan^4 x - \tan^2 x - 2}{\tan^2 x - 4} dx$ において, $t = \tan x$ とおくと, (1) より, $dx = \frac{dt}{1+t^2}$ であり,

x と t の対応関係は次表の通りである.

x	$0 \longrightarrow \frac{\pi}{4}$
t	$0 \longrightarrow 1$

よって

$$\begin{aligned}I &= \int_0^1 \frac{t^4 - t^2 - 2}{t^2 - 4} \cdot \frac{1}{1+t^2} dt \\ &= \int_0^1 \frac{(t^2 - 2)(t^2 + 1)}{(t^2 - 4)(t^2 + 1)} dt \\ &= \int_0^1 \frac{t^2 - 2}{t^2 - 4} dt \\ &= \int_0^1 \frac{(t^2 - 4) + 2}{t^2 - 4} dt \\ &= \int_0^1 \left(1 + \frac{2}{t^2 - 4} \right) dt \\ &= \int_0^1 \left\{ 1 + \frac{2}{(t-2)(t+2)} \right\} dt \\ &= \int_0^1 \left\{ 1 + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{t-2} - \frac{1}{t+2} \right) \right\} dt \\ &= \left[t + \frac{1}{2} \left(\log |t-2| - \log |t+2| \right) \right]_0^1 \\ &= \left[t + \frac{1}{2} \log \left| \frac{t-2}{t+2} \right| \right]_0^1 \\ &= \left(1 + \frac{1}{2} \log \left| \frac{-1}{3} \right| \right) - \left(0 + \frac{1}{2} \log \left| \frac{-2}{2} \right| \right) \\ &= 1 + \frac{1}{2} \log \frac{1}{3} - \frac{1}{2} \log 1 \\ &= 1 - \frac{1}{2} \log 3. \dots\dots\dots (\text{答})\end{aligned}$$

[3]

(1) 以下, k を整数とする。

$$n = 4k \text{ のとき, } n^2 = (4k)^2 = 16k^2 = 8 \cdot 2k^2$$

$$n = 4k \pm 1 \text{ のとき, } n^2 = (4k \pm 1)^2 = 16k^2 \pm 8k + (\pm 1)^2 = 8(2k^2 \pm k) + 1$$

$$n = 4k + 2 \text{ のとき, } n^2 = (4k + 2)^2 = 16k^2 + 16k + 2^2 = 8(2k^2 + 2k) + 4$$

したがって, n を整数とすると, n^2 を 8 で割った余りは 0, 1, 4 のいずれかである。……(証明終わり)

$$(2) \quad 2^m = n^2 + 3 \Leftrightarrow n^2 = 2^m - 3 \quad \dots\dots ①$$

とする。 n は 0 以上の整数であるから, ①より,

$$2^m = n^2 + 3 \geq 3 \quad \therefore m \geq 2$$

$$m = 2 \text{ のとき, ①より, } n^2 = 2^2 - 3 = 1 \quad \therefore n = 1$$

$m \geq 3$ のとき, 2^m は 8 で割り切れる。(1) より $n^2 + 3$ を 8 で割った余りは 3, 4, 7 のいずれかであるから,

①をみたす 0 以上の整数の組 (m, n) は存在しない。

以上より, ①をみたす 0 以上の整数の組 (m, n) は 1 組だけであり,

$$(m, n) = (2, 1)$$

……(答)

参考

1° [(1)の別解]

以下, 8 を法とする合同式で考える。

$$n \equiv 0 \text{ のとき, } n^2 \equiv 0$$

$$n \equiv \pm 1 \text{ のとき, } n^2 \equiv (\pm 1)^2 \equiv 1$$

$$n \equiv \pm 2 \text{ のとき, } n^2 \equiv (\pm 2)^2 \equiv 4$$

$$n \equiv \pm 3 \text{ のとき, } n^2 \equiv (\pm 3)^2 \equiv 9 \equiv 1$$

$$n \equiv 4 \text{ のとき, } n^2 \equiv 4^2 \equiv 16 \equiv 0$$

したがって, n を整数とすると, n^2 を 8 で割った余りは 0, 1, 4 のいずれかである。……(証明終わり)

2° (1) の $n = 4k \pm 1$ は奇数であるから, $n = 2k + 1$ でもよい。

$$n = 2k + 1 \text{ のとき, } n^2 = (2k + 1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 4k(k + 1) + 1$$

$k(k + 1)$ は連続する 2 つの整数の積であるから, 2! の倍数である。

したがって, $n^2 = 4k(k + 1) + 1$ を 8 で割った余りは 1 である。

3° 2015 年に同様なやや難しい整数問題が出題されている。

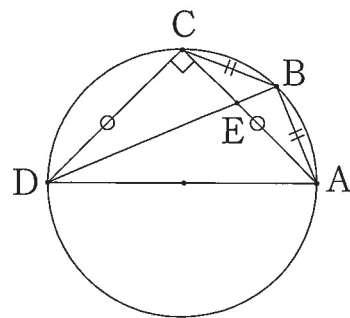
[4]

- (1) 線分 AD は直径であるから, $\angle ACD = \frac{\pi}{2}$ であり, さらに, $AC = CD$ より, $\angle ADC = \frac{\pi}{4}$ である. 四角形 ABCD は円に内接するので

$$\angle ABC = \pi - \angle ADC = \pi - \frac{\pi}{4} = \frac{3}{4}\pi$$

これと, $AB = BC$ より

$$\angle ACB = \frac{1}{2}(\pi - \angle ABC) = \frac{1}{2}\left(\pi - \frac{3}{4}\pi\right) = \frac{\pi}{8} \quad \dots\dots(\text{答})$$



- (2) $\triangle ACD$ は $AD = 2$ を斜辺とする直角二等辺三角形であるから, $AC = \frac{AD}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$ である. $BC = AB = x$ とおき, $\triangle ABC$ に余弦定理を適用すると

$$(\sqrt{2})^2 = x^2 + x^2 - 2x \cdot x \cdot \cos \frac{3}{4}\pi$$

すなわち,

$$2 = (2 + \sqrt{2})x^2$$

が成り立つので, $x > 0$ に注意すると

$$x = \sqrt{\frac{2}{2 + \sqrt{2}}} = \sqrt{2 - \sqrt{2}}$$

よって

$$BC = \sqrt{2 - \sqrt{2}} \quad \dots\dots(\text{答})$$

- (3) $AB = BC$ より, $\widehat{AB} = \widehat{BC}$ であるから, $\angle ADB = \angle BDC$ である. よって, 角の二等分線の性質により

$$AE : EC = AD : CD = AD : \frac{AD}{\sqrt{2}} = \sqrt{2} : 1$$

ゆえに

$$\begin{aligned} \triangle BCE &= \frac{EC}{AC} \cdot \triangle ABC \\ &= \frac{1}{\sqrt{2} + 1} \triangle ABC \\ &= \frac{1}{\sqrt{2} + 1} \cdot \frac{1}{2} \cdot AB \cdot BC \cdot \sin \frac{3}{4}\pi \\ &= \frac{1}{\sqrt{2} + 1} \cdot \frac{1}{2} \cdot (\sqrt{2 - \sqrt{2}})^2 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \\ &= \frac{3 - 2\sqrt{2}}{2} \quad \dots\dots(\text{答}) \end{aligned}$$

[5]

$f(x) = (x^2 - ax + b)(x - c)$ において,

$f(x) = 0$ のとき, $x^2 - ax + b = 0 \dots \textcircled{1}$ または $x = c$ を実数解にもつ.

(1) $\textcircled{1}$ が虚数解をもつときと, $\textcircled{1}$ が $x = c$ を重解にもつときを求める.

(i) $\textcircled{1}$ が虚数解をもつとき

$D < 0$ より, $a^2 - 4b < 0$ をみたす (a, b) は,

$(a, b) = (1, 1)(1, 2)(1, 3)(1, 4)(1, 5)(1, 6)$

$(2, 2)(2, 3)(2, 4)(2, 5)(2, 6)$

$(3, 3)(3, 4)(3, 5)(3, 6)(4, 5)(4, 6)$

の 17 通り.

c は a, b の値によらずどの目でもよいのでこの確率は,

$$\frac{17}{6^2} = \frac{17}{36}$$

(ii) $\textcircled{1}$ が $x = c$ を重解にもつとき

$D = 0$ より, $a^2 - 4b = 0$ をみたす (a, b) は,

$(a, b) = (2, 1)(4, 4)$ の 2 通り.

c はこれらの a, b の値に対して 1 通りに決まるのでこの確率は,

$$\frac{2}{6^3} = \frac{1}{108}$$

以上より求める確率は,

$$\frac{17}{36} + \frac{1}{108} = \frac{13}{27} \quad \dots (\text{答})$$

(2) 方程式 $f(x) = 0$ が異なる 3 個の自然数解をもつとき,

$\textcircled{1}$ は異なる 2 個の実数解をもつので, $D > 0$ より, $a^2 - 4b > 0$ をみたす.

$\textcircled{1}$ の 2 つの自然数解を α, β とする. ($\alpha > \beta$)

解と係数の関係より,

$$\begin{cases} \alpha + \beta = a \\ \alpha\beta = b \end{cases}$$

(i) $\alpha\beta = 1$ のとき, $\alpha = \beta = 1$ より重解となるので不適.

(ii) $\alpha\beta = 2$ のとき, $(\alpha, \beta) = (2, 1)$ より, $(a, b) = (3, 2)$ となるので,

みたす c は 3, 4, 5, 6 の 4 通り.

(iii) $\alpha\beta = 3$ のとき, $(\alpha, \beta) = (3, 1)$ より, $(a, b) = (4, 3)$ となるので,

みたす c は 2, 4, 5, 6 の 4 通り.

(iv) $\alpha\beta = 4$ のとき, $(\alpha, \beta) = (4, 1)$ より, $(a, b) = (5, 4)$ となるので,

みたす c は 2, 3, 5, 6 の 4 通り.

(v) $\alpha\beta = 5$ のとき, $(\alpha, \beta) = (5, 1)$ より, $(a, b) = (6, 5)$ となるので,

みたす c は 2, 3, 4, 6 の 4 通り.

(vi) $\alpha\beta = 6$ のとき, $(\alpha, \beta) = (3, 2), (6, 1)$ となるが, $(6, 1)$ は $a = 7$ より不適.

$(\alpha, \beta) = (3, 2)$ より, $(a, b) = (5, 6)$ となるのでみたす c は 1, 4, 5, 6 の 4 通り.

(i)~(vi) よりみたす (a, b, c) は 20 通り.

以上より求める確率は,

$$\frac{5}{54} \quad \dots(\text{答})$$