

2025 年度 九州大学 前期 数学 文系

〔1〕

$f(x) = x^3 + x^2 - x - 1, g(x) = x^2$ とおき, $C_1 : y = f(x), C_2 : y = g(x)$ とするとき,

$$f'(x) = 3x^2 + 2x - 1, g'(x) = 2x$$

C_1 と C_2 の両方に接する直線を ℓ とし, ℓ と C_1 の接点の x 座標を t とおくとき, ℓ の方程式は,

$$y = (3t^2 + 2t - 1)(x - t) + t^3 + t^2 - t - 1$$

すなわち,

$$y = (3t^2 + 2t - 1)x - 2t^3 - t^2 - 1 \quad \dots\dots (*)$$

ℓ と C_2 は接するから,

$$x^2 = (3t^2 + 2t - 1)x - 2t^3 - t^2 - 1$$

すなわち,

$$x^2 - (3t^2 + 2t - 1)x + 2t^3 + t^2 + 1 = 0$$

は重解をもつ. そこで, 判別式を D とおくと, $D = 0$ であるから,

$$D = (3t^2 + 2t - 1)^2 - 4(2t^3 + t^2 + 1) = 0$$

$$9t^4 + 4t^3 - 6t^2 - 4t - 3 = 0$$

すなわち, $(t + 1)(t - 1)(9t^2 + 4t + 3) = 0$

t は実数であるから,

$$9t^2 + 4t + 3 = 9\left(t + \frac{2}{9}\right)^2 + \frac{23}{9} > 0$$

したがって, $t = \pm 1$

(*) に代入することにより, 求める直線の方程式は

$$y = 0, y = 4x - 4 \quad \dots\dots (\text{答})$$

である.

1° 別解

$f(x) = x^3 + x^2 - x - 1, g(x) = x^2$ とおく. $f'(x) = 3x^2 + 2x - 1, g'(x) = 2x$ により, 曲線 $y = f(x)$ 上の点 $(t, t^3 + t^2 - t - 1)$, 曲線 $y = g(x)$ 上の点 (s, s^2) における接線の方程式は,

$$y = (3t^2 + 2t - 1)x - 2t^3 - t^2 - 1 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$y = 2sx - s^2 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

題意を満たすとき、接線①を ℓ 、接線②を m とすると、 ℓ と m が一致するときである。
 このとき、①、②から、

$$2s = 3t^2 + 2t - 1 = (t+1)(3t-1) \quad \dots\dots ③$$

$$s^2 = 2t^3 + t^2 + 1 = (t+1)(2t^2 - t + 1) \quad \dots\dots ④$$

③² - ④ × 4 により、

$$(3t-1)^2(t+1)^2 - 4(t+1)(2t^2 - t + 1) = 0$$

式を整理して、

$$(t+1)(t-1)(9t^2 + 4t + 3) = 0 \quad \dots\dots ⑤$$

$$9t^2 + 4t + 3 = 9\left(t + \frac{2}{9}\right)^2 + \frac{23}{9} > 0$$

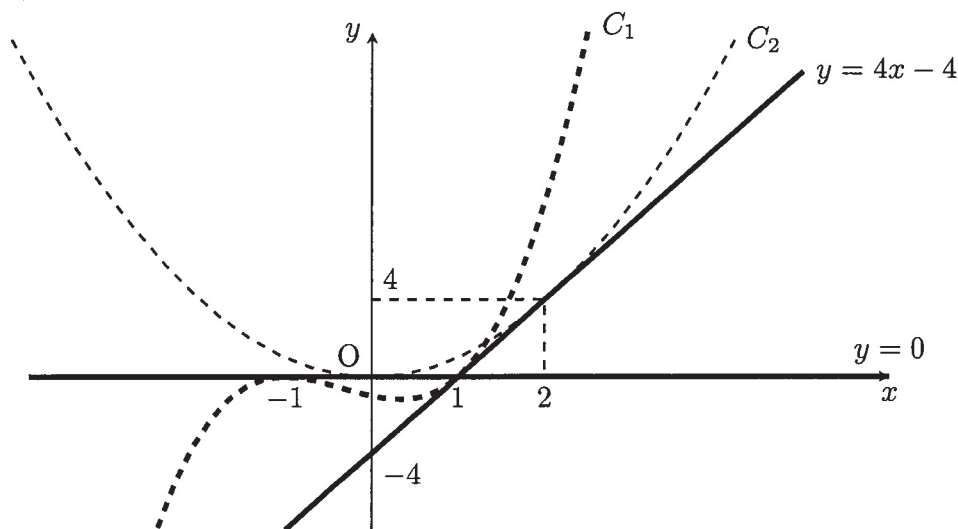
により、⑤を満たす実数 t は、 $t = \pm 1$ である。

したがって、③、④をとともに満たす t, s の組は $(t, s) = (-1, 0), (1, 2)$ であり、 ℓ と m が一致するときの、直線の方程式は、①、②から

$$y = 0, y = 4x - 4 \quad \dots\dots (\text{答})$$

である。

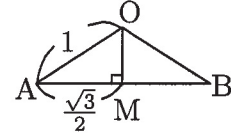
2° C_1, C_2 と共通接線のグラフは下図のようになる。



〔2〕

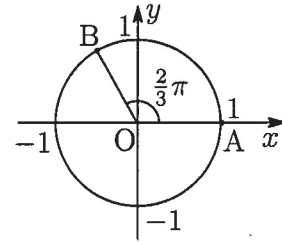
円周 C の中心を O とする.

$\triangle OAB$ において, AB の中点を M とおくと $OA = 1$,
 $AM = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $OM \perp AB$ より $\angle AOM = \frac{\pi}{3}$ となるから,
 $\angle AOB = 2\angle AOM = \frac{2}{3}\pi$



座標平面上に, 原点 O を中心とする半径 1 の円周 C をとる.

C 上に点 $A(1, 0)$, $B\left(\cos \frac{2}{3}\pi, \sin \frac{2}{3}\pi\right) = \left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$



をとると, $AB = \sqrt{3}$ であるから, 一般性を失わない.

C 上の動点 P を $P(\cos \theta, \sin \theta)$ ($0 \leq \theta < 2\pi$) とおくと,

$$\begin{aligned} AP^2 + BP^2 &= (\cos \theta - 1)^2 + \sin^2 \theta + \left(\cos \theta + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(\sin \theta - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 \\ &= \cos^2 \theta - 2\cos \theta + 1 + \sin^2 \theta + \cos^2 \theta + \cos \theta + \frac{1}{4} + \sin^2 \theta - \sqrt{3}\sin \theta + \frac{3}{4} \\ &= 4 - (\sqrt{3}\sin \theta + \cos \theta) \\ &= 4 - 2\sin\left(\theta + \frac{\pi}{6}\right) \end{aligned}$$

$0 \leq \theta < 2\pi$ より $\frac{\pi}{6} \leq \theta + \frac{\pi}{6} < \frac{13}{6}\pi$ であるから $-1 \leq \sin\left(\theta + \frac{\pi}{6}\right) \leq 1$

このとき $4 - 2 \leq 4 - 2\sin\left(\theta + \frac{\pi}{6}\right) \leq 4 + 2$ となり,

$AP^2 + BP^2$ の取り得る値の範囲は

$$2 \leq AP^2 + BP^2 \leq 6$$

よって, $AP^2 + BP^2$ は, $\theta + \frac{\pi}{6} = \frac{3}{2}\pi$ すなわち $\theta = \frac{4}{3}\pi$ のとき, 最大値 6 をとる.

..... (答)

(注) 座標を設定しなくても, 点 P が「優弧 AB 上にあるとき」, 「劣弧 AB 上にあるとき」の場合分けをすれば, それぞれの最大値の, より大きい方が正解になる.

[3]

(1) 以下, k を整数とする。

$$n=4k \text{ のとき, } n^2=(4k)^2=16k^2=8 \cdot 2k^2$$

$$n=4k \pm 1 \text{ のとき, } n^2=(4k \pm 1)^2=16k^2 \pm 8k + (\pm 1)^2=8(2k^2 \pm k) + 1$$

$$n=4k+2 \text{ のとき, } n^2=(4k+2)^2=16k^2+16k+2^2=8(2k^2+2k)+4$$

したがって, n を整数とすると, n^2 を 8 で割った余りは 0, 1, 4 のいずれかである。……(証明終わり)

$$(2) \quad 2^m = n^2 + 3 \Leftrightarrow n^2 = 2^m - 3 \quad \dots\dots ①$$

とする。 n は 0 以上の整数であるから, ①より,

$$2^m = n^2 + 3 \geq 3 \quad \therefore m \geq 2$$

$$m=2 \text{ のとき, } ①\text{より, } n^2 = 2^2 - 3 = 1 \quad \therefore n=1$$

$m \geq 3$ のとき, 2^m は 8 で割り切れる。(1) より $n^2 + 3$ を 8 で割った余りは 3, 4, 7 のいずれかであるから,

①をみたす 0 以上の整数の組 (m, n) は存在しない。

以上より, ①をみたす 0 以上の整数の組 (m, n) は 1 組だけであり,

$$(m, n) = (2, 1) \quad \dots\dots (\text{答})$$

参考

1° [(1)の別解]

以下, 8 を法とする合同式で考える。

$$n \equiv 0 \text{ のとき, } n^2 \equiv 0$$

$$n \equiv \pm 1 \text{ のとき, } n^2 \equiv (\pm 1)^2 \equiv 1$$

$$n \equiv \pm 2 \text{ のとき, } n^2 \equiv (\pm 2)^2 \equiv 4$$

$$n \equiv \pm 3 \text{ のとき, } n^2 \equiv (\pm 3)^2 \equiv 9 \equiv 1$$

$$n \equiv 4 \text{ のとき, } n^2 \equiv 4^2 \equiv 16 \equiv 0$$

したがって, n を整数とすると, n^2 を 8 で割った余りは 0, 1, 4 のいずれかである。……(証明終わり)

2° (1) の $n=4k \pm 1$ は奇数であるから, $n=2k+1$ でもよい。

$$n=2k+1 \text{ のとき, } n^2=(2k+1)^2=4k^2+4k+1=4k(k+1)+1$$

$k(k+1)$ は連続する 2 つの整数の積であるから, $2!$ の倍数である。

したがって, $n^2=4k(k+1)+1$ を 8 で割った余りは 1 である。

3° 2015 年に同様なやや難しい整数問題が出題されている。

[4]

$f(x) = (x^2 - ax + b)(x - c)$ において,

$f(x) = 0$ のとき, $x^2 - ax + b = 0 \dots \textcircled{1}$ または $x = c$ を実数解にもつ.

(1) $\textcircled{1}$ が虚数解をもつときと, $\textcircled{1}$ が $x = c$ を重解にもつときを求める.

(i) $\textcircled{1}$ が虚数解をもつとき

$D < 0$ より, $a^2 - 4b < 0$ をみたす (a, b) は,

$(a, b) = (1, 1)(1, 2)(1, 3)(1, 4)(1, 5)(1, 6)$

$(2, 2)(2, 3)(2, 4)(2, 5)(2, 6)$

$(3, 3)(3, 4)(3, 5)(3, 6)(4, 5)(4, 6)$

の 17 通り.

c は a, b の値によらずどの目でもよいのでこの確率は,

$$\frac{17}{6^2} = \frac{17}{36}$$

(ii) $\textcircled{1}$ が $x = c$ を重解にもつとき

$D = 0$ より, $a^2 - 4b = 0$ をみたす (a, b) は,

$(a, b) = (2, 1)(4, 4)$ の 2 通り.

c はこれらの a, b の値に対して 1 通りに決まるのでこの確率は,

$$\frac{2}{6^3} = \frac{1}{108}$$

以上より求める確率は,

$$\frac{17}{36} + \frac{1}{108} = \frac{13}{27} \quad \dots (\text{答})$$

(2) 方程式 $f(x) = 0$ が異なる 3 個の自然数解をもつとき,

$\textcircled{1}$ は異なる 2 個の実数解をもつので, $D > 0$ より, $a^2 - 4b > 0$ をみたす.

$\textcircled{1}$ の 2 つの自然数解を α, β とする. ($\alpha > \beta$)

解と係数の関係より,

$$\begin{cases} \alpha + \beta = a \\ \alpha\beta = b \end{cases}$$

(i) $\alpha\beta = 1$ のとき, $\alpha = \beta = 1$ より重解となるので不適.

(ii) $\alpha\beta = 2$ のとき, $(\alpha, \beta) = (2, 1)$ より, $(a, b) = (3, 2)$ となるので,

みたす c は 3, 4, 5, 6 の 4 通り.

(iii) $\alpha\beta = 3$ のとき, $(\alpha, \beta) = (3, 1)$ より, $(a, b) = (4, 3)$ となるので,

みたす c は 2, 4, 5, 6 の 4 通り.

(iv) $\alpha\beta = 4$ のとき, $(\alpha, \beta) = (4, 1)$ より, $(a, b) = (5, 4)$ となるので,

みたす c は 2, 3, 5, 6 の 4 通り.

(v) $\alpha\beta = 5$ のとき, $(\alpha, \beta) = (5, 1)$ より, $(a, b) = (6, 5)$ となるので,

みたす c は 2, 3, 4, 6 の 4 通り.

(vi) $\alpha\beta = 6$ のとき, $(\alpha, \beta) = (3, 2), (6, 1)$ となるが, $(6, 1)$ は $a = 7$ より不適.

$(\alpha, \beta) = (3, 2)$ より, $(a, b) = (5, 6)$ となるのでみたす c は 1, 4, 5, 6 の 4 通り.

(i)~(vi) よりみたす (a, b, c) は 20 通り.

以上より求める確率は,

$$\frac{5}{54} \quad \dots(\text{答})$$