

2025年度 名古屋大学 前期 数学 理系

1

$$(1) \quad g'(x) = c - f'(x) \\ g''(x) = -f''(x) < 0$$

ゆえに、 $g'(x)$ は減少関数である。また、 $\lim_{x \rightarrow -\infty} g'(x) = c - a > 0$ 、 $\lim_{x \rightarrow \infty} g'(x) = c - b < 0$ であり、 $g'(x)$ が連続であることから、 $g'(x)$ が正から負へと変化する x がただひとつ存在する。この値を $x = x_0$ とおくと、 $g(x)$ の増減は次のようになる。

x		x_0	
$g'(x)$	+	0	-
$g(x)$	↗		↘

よって、 $g(x)$ の値を最大にする $x = x_0$ がただひとつ存在する。 (証明終わり)

$$(2) \quad f(x) = \log(e^x + e^{-x}) - \log 2$$

$$f'(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

$$f''(x) = \frac{(e^x + e^{-x})^2 - (e^x - e^{-x})^2}{(e^x + e^{-x})^2} = \frac{4}{(e^x + e^{-x})^2} > 0 \quad (\text{証明終わり})$$

また、

$$a = \lim_{x \rightarrow -\infty} f'(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1} = -1, \quad b = \lim_{x \rightarrow \infty} f'(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 - e^{-2x}}{1 + e^{-2x}} = 1 \quad \dots\dots (\text{答})$$

$$(3) \quad g(x) = cx - \log\left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right) \text{ であり、 } g'(x) = c - \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = 0 \text{ について、}$$

$$c(e^x + e^{-x}) - (e^x - e^{-x}) = 0$$

$$(1 - c)e^{2x} = 1 + c$$

$$e^x = \sqrt{\frac{1+c}{1-c}} \quad (-1 < c < 1 \text{ より})$$

$$x = \frac{1}{2} \log \frac{1+c}{1-c}$$

$$\text{ゆえに、 } x_0 = \frac{1}{2} \log \frac{1+c}{1-c} \quad \dots\dots (\text{答})$$

$$\begin{aligned} g(x_0) &= \frac{c}{2} \log \frac{1+c}{1-c} - \log \frac{\sqrt{\frac{1+c}{1-c}} + \sqrt{\frac{1-c}{1+c}}}{2} \\ &= \frac{c}{2} \{ \log(1+c) - \log(1-c) \} - \log \frac{1+c+1-c}{2\sqrt{1+c}\sqrt{1-c}} \\ &= \frac{c}{2} \log(1+c) - \frac{c}{2} \log(1-c) + \frac{1}{2} \log(1+c)(1-c) \\ &= \frac{1+c}{2} \log(1+c) + \frac{1-c}{2} \log(1-c) \quad \dots\dots (\text{答}) \end{aligned}$$

2

$$\begin{cases} a \geq b \geq 0 & \cdots \cdots \textcircled{1} \\ a^2 - b^2 = c & \cdots \cdots \textcircled{2} \end{cases}$$

とする. ① より

$$a + b \geq a - b \geq 0 \cdots \cdots \textcircled{3}$$

である. また, $(a + b) + (a - b) = 2a$ (偶数) より

$$\text{整数 } a + b \text{ と整数 } a - b \text{ の偶奇は一致する } \cdots \cdots \textcircled{4}$$

(1) $c = 24$ のとき, ② は

$$(a + b)(a - b) = 24$$

と変形でき, これと ③, ④ をみたす整数の組 $(a + b, a - b)$ は

$$(a + b, a - b) = (12, 2), (6, 4)$$

に限られて, 求める整数の組 (a, b) は

$$(a, b) = (7, 5), (5, 1) \cdots \cdots (\text{答})$$

である.

$c = 25$ のとき, ② は

$$(a + b)(a - b) = 25$$

と変形でき, これと ③, ④ をみたす整数の組 $(a + b, a - b)$ は

$$(a + b, a - b) = (25, 1), (5, 5)$$

に限られて, 求める整数の組 (a, b) は

$$(a, b) = (13, 12), (5, 0) \cdots \cdots (\text{答})$$

である.

$c = 26$ のとき, ② は

$$(a + b)(a - b) = 26$$

と変形でき, これと ③, ④ をみたす整数の組 $(a + b, a - b)$ は存在しない.

よって, 求める整数の組 (a, b) は存在しない. $\cdots \cdots (\text{答})$

(2) p は 3 以上の素数であるから奇数である. $c = 4p^{2n}$ のとき, ② は

$$(a + b)(a - b) = 4p^{2n}$$

と変形でき, これと ③, ④ をみたす整数の組 $(a + b, a - b)$ は p が奇数の素数であることに注意すると

$$(a + b, a - b) = (2p^{2n-k}, 2p^k) \quad (k = 0, 1, 2, \cdots, n)$$

に限られて, 求める整数の組 (a, b) は

$$(a, b) = (p^{2n-k} + p^k, p^{2n-k} - p^k) \quad (k = 0, 1, 2, \cdots, n) \cdots \cdots (\text{答})$$

である.

3

- (1) 原点を O とする。 C 上の点で O と C の距離が最小となる点を P ，最大となる点を Q とすると， P は始め $(1-r, 0)$ にあり， Q は始め $(1+r, 0)$ にある。

C を O を中心に反時計回りに角度 α だけ回転させたとき， C が通過する領域は図 1 のようになる。

よって，領域の面積を S とすると

$$\begin{aligned} S &= \pi r^2 + \frac{1}{2}(1+r)^2\alpha - \frac{1}{2}(1-r)^2\alpha \\ &= \pi r^2 + \frac{1}{2}\{(1+r)^2 - (1-r)^2\}\alpha \\ &= \pi r^2 + 2r\alpha \quad \dots\dots\dots (\text{答}) \end{aligned}$$

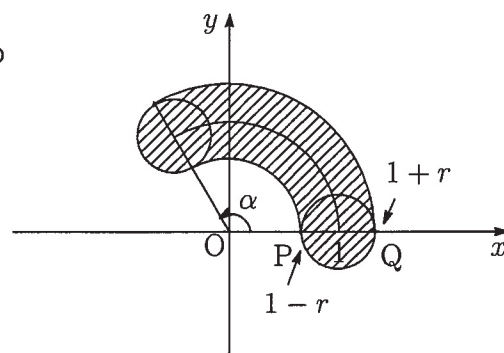


図 1

- (2) $(1, 0, 0)$ を中心とし，半径 R の球面の方程式は

$$(x-1)^2 + y^2 + z^2 = R^2$$

である。この球面を平面 $z=t$ ($-R \leq t \leq R$) で切った断面の方程式は

$$(x-1)^2 + y^2 = R^2 - t^2$$

である。この円の周およびその内部を

$(0, 0, t)$ を中心に反時計回りに角度 α だけ

回転して通過する領域 (図 3) の面積を $S(t)$ は

(1) の結果に $r = \sqrt{R^2 - t^2}$ を代入して

$$\begin{aligned} S(t) &= 2\alpha\sqrt{R^2 - t^2} + \pi(\sqrt{R^2 - t^2})^2 \\ &= 2\alpha\sqrt{R^2 - t^2} + \pi(R^2 - t^2) \end{aligned}$$

よって， B が通過する領域の体積を V とすると，

対称性より，

$$\begin{aligned} V &= 2 \int_0^R \{2\alpha\sqrt{R^2 - t^2} + \pi(R^2 - t^2)\} dt \\ &= 4\alpha \int_0^R \sqrt{R^2 - t^2} dt + 2\pi \left[R^2 t - \frac{1}{3} t^3 \right]_0^R \end{aligned}$$

$\int_0^R \sqrt{R^2 - t^2} dt$ は，半径 R の 4 分円の面積に等しいので，

$$V = 4\alpha \cdot \frac{1}{4}\pi R^2 + \frac{4}{3}\pi R^3 = \pi R^2\alpha + \frac{4}{3}\pi R^3 \quad \dots\dots\dots (\text{答})$$

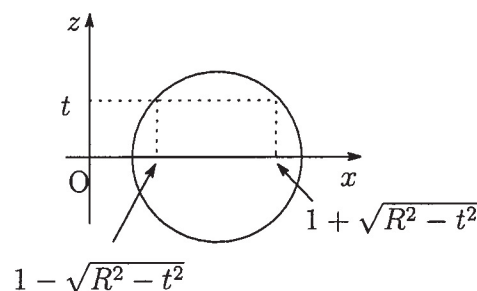


図 2

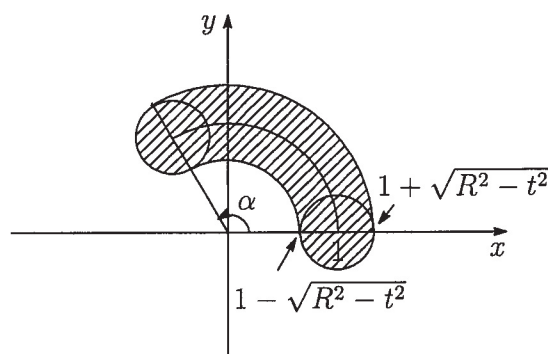


図 3

(1) $n = 2$ のとき, コインの選び方は全部で 6^2 通りある.

このうち, 操作終了時点ですべてのコインが裏向きであるのは,

②と⑤がそれぞれ 1 回ずつ選ばれる

場合であるから 2 通りである.

ゆえに

$$p_2 = \frac{2}{6^2} = \frac{1}{18} \cdots \cdots \cdots (\text{答})$$

①	②	③
④	⑤	⑥

(2) $k = 1, 2, 3, 4, 5, 6$ として, n 回の操作中コイン ⑥ が選ばれる回数を N_k とすると,

①が裏返される回数は, $N_2 + N_4$

②が裏返される回数は, $N_1 + N_3 + N_5$

③が裏返される回数は, $N_2 + N_6$

④が裏返される回数は, $N_1 + N_5$

⑤が裏返される回数は, $N_2 + N_4 + N_6$

⑥が裏返される回数は, $N_3 + N_5$

である.

n 回の操作終了時点ですべてのコインが裏向きであるための必要十分条件は, 各コインをそれぞれ奇数回裏返すことであるから, 合同式の法を 2 として

$$\begin{cases} N_2 + N_4 \equiv 1 \\ N_1 + N_3 + N_5 \equiv 1 \\ N_2 + N_6 \equiv 1 \\ N_1 + N_5 \equiv 1 \\ N_2 + N_4 + N_6 \equiv 1 \\ N_3 + N_5 \equiv 1 \end{cases}$$

すなわち,

$$N_2 \equiv N_5 \equiv 1 \text{ かつ } N_1 \equiv N_3 \equiv N_4 \equiv N_6 \equiv 0$$

と表される.

ゆえに, 各コインを

$$A = \{②, ⑤\}, \quad B = \{①, ③, ④, ⑥\} \cdots \cdots \cdots (\text{答})$$

とグループ分けすればよい.

(3) $n = 4$ のとき, コインの選び方は全部で 6^4 通りある.

このうち, 操作終了時点ですべてのコインが裏向きであるのは,

$$N_1 + N_2 + N_3 + N_4 + N_5 + N_6 = 4 \cdots \cdots (\star)$$

のもとで, (2) のグループ分けが成り立つ場合である.

このとき, $(N_2, N_5) = (1, 1), (3, 1), (1, 3)$ である.

$(N_2, N_5) = (1, 1)$ の場合

($\star$) より, $N_1 + N_3 + N_4 + N_6 = 2$ であるから

$$(N_1, N_3, N_4, N_6) = (2, 0, 0, 0), (0, 2, 0, 0), (0, 0, 2, 0), (0, 0, 0, 2)$$

であり, コインの選び方は $\frac{4!}{2!} \cdot 4 = 48$ 通りある.

$(N_2, N_5) = (3, 1)$ の場合

($\star$) より, $N_1 + N_3 + N_4 + N_6 = 0$ であるから

$$(N_1, N_3, N_4, N_6) = (0, 0, 0, 0)$$

であり, コインの選び方は $\frac{4!}{3!} = 4$ 通りある.

$(N_2, N_5) = (1, 3)$ の場合

($\star$) より, $N_1 + N_3 + N_4 + N_6 = 0$ であるから

$$(N_1, N_3, N_4, N_6) = (0, 0, 0, 0)$$

であり, コインの選び方は $\frac{4!}{3!} = 4$ 通りある.

以上より

$$p_4 = \frac{48 + 4 + 4}{6^4} = \frac{7}{162} \cdots \cdots (\text{答})$$