

2025年度 名古屋大学 前期 数学 文系

1

放物線が x 軸と異なる 2 点で交わっていることより, $f(x) = 0$ の判別式を考えて

$$b^2 - 4c > 0 \dots \textcircled{1}$$

p, q は 2 次方程式 $f(x) = 0$ の 2 解であるから, 解と係数の関係より

$$p + q = -b, \quad pq = c$$

$$(1) \quad q - s = q - \left(\frac{1-t}{2}p + \frac{1+t}{2}q \right) = \frac{1-t}{2}(q - p)$$

ここで

$$(q - p)^2 = (p + q)^2 - 4pq = b^2 - 4c$$

であり, $q - p > 0$ であるから

$$q - p = \sqrt{b^2 - 4c}$$

したがって

$$q - s = \frac{1-t}{2}\sqrt{b^2 - 4c} \dots\dots(\text{答})$$

同様に

$$r - p = \left(\frac{1+t}{2}p + \frac{1-t}{2}q \right) - p = \frac{1-t}{2}(q - p) = \frac{1-t}{2}\sqrt{b^2 - 4c} \dots\dots(\text{答})$$

$$s + r = p + q = -b \dots\dots(\text{答})$$

$$s - r = t(q - p) = t\sqrt{b^2 - 4c} \dots\dots(\text{答})$$

$$\begin{aligned} (2) \quad sr &= \left(\frac{1-t}{2}p + \frac{1+t}{2}q \right) \left(\frac{1+t}{2}p + \frac{1-t}{2}q \right) \\ &= \frac{1-t^2}{4}(p^2 + q^2) + \frac{1+t^2}{2}pq \\ &= \frac{1-t^2}{4}(b^2 - 2c) + \frac{1+t^2}{2}c \\ &= \frac{1-t^2}{4}b^2 + t^2c \dots\dots(\text{答}) \end{aligned}$$

$$\left(\ast sr = \frac{(s+r)^2 - (s-r)^2}{4} \text{からも計算できる} \right)$$

$$\left(\ast (1) \text{の結果から } s = \frac{-b + t\sqrt{b^2 - 4c}}{2}, r = \frac{-b - t\sqrt{b^2 - 4c}}{2} \text{を求めて計算してもよい} \right)$$

$$\begin{aligned} s^2 + r^2 &= (s+r)^2 - 2sr \\ &= b^2 - \left(\frac{1-t^2}{4}b^2 + t^2c \right) \\ &= \frac{1+t^2}{4}b^2 - t^2c \dots\dots(\text{答}) \end{aligned}$$

(3) (1) の結果と①, $0 < t \leq 1$ より

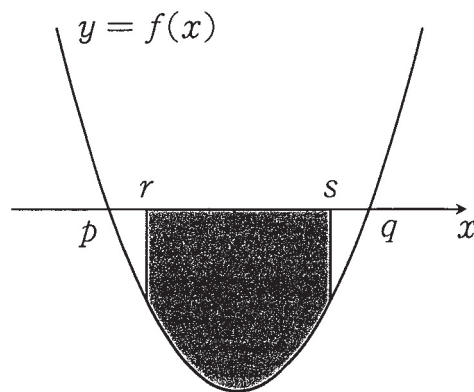
$$q - s \geq 0$$

$$r - p \geq 0$$

$$s - r > 0$$

であるから $p \leq r < s \leq q$ だとわかる. よって, 求める面積を S とすると

$$\begin{aligned} S &= - \int_r^s (x^2 + bx + c) dx = - \left[\frac{x^3}{3} + \frac{b}{2}x^2 + cx \right]_r^s \\ &= - \left\{ \frac{s^3 - r^3}{3} + \frac{b}{2}(s^2 - r^2) + c(s - r) \right\} \\ &= -(s - r) \left\{ \frac{(s + r)^2 - sr}{3} + \frac{b}{2}(s + r) + c \right\} \\ &= -t\sqrt{b^2 - 4c} \left(\frac{b^2}{3} - \frac{1 - t^2}{12}b^2 - \frac{t^2c}{3} - \frac{b^2}{2} + c \right) \\ &= \frac{t}{12} (3 - t^2) (b^2 - 4c)^{\frac{3}{2}} \quad \dots\dots(\text{答}) \end{aligned}$$



【参考】

$P(p, 0)$, $Q(q, 0)$, $R(r, 0)$, $S(s, 0)$, $M\left(\frac{p+q}{2}, 0\right)$ とすると

$$s = \frac{p+q}{2} + t \cdot \frac{q-p}{2}$$

より

$$\overrightarrow{OS} = \overrightarrow{OM} + \frac{t}{2}\overrightarrow{PQ} \quad \therefore \overrightarrow{MS} = t\overrightarrow{MQ}$$

となり, $0 < t \leq 1$ であるから S は線分 MQ (点 M を除く) の上にあることがわかる.

同様に, $\overrightarrow{MR} = t\overrightarrow{MP}$ より, R は線分 MP (点 M を除く) の上にあることがわかる.

$t = 1$ のとき R, S はそれぞれ P, Q と一致し

$$S = \frac{1}{6} (b^2 - 4c)^{\frac{3}{2}} = \frac{1}{6} (q - p)^3$$

となっている.

2

$a^2 - b^2 = c$ より

$$(a+b)(a-b) = c$$

さらに, $(a+b) - (a-b) = 2b$ と $a \geq b \geq 0$ より,

$a+b$ と $a-b$ は偶奇が一致し, $a+b \geq a-b \geq 0$ である.

以下, これらに注意して考える.

(1) $c = 24$ のとき

$$(a+b)(a-b) = 24$$

よって $(a+b, a-b) = (12, 2), (6, 4)$

したがって $(a, b) = (7, 5), (5, 1)$ (答)

$c = 25$ のとき

$$(a+b)(a-b) = 25$$

よって $(a+b, a-b) = (25, 1), (5, 5)$

したがって $(a, b) = (13, 12), (5, 0)$ (答)

$c = 26$ のとき

$$(a+b)(a-b) = 26$$

$26 = 2 \times 13$ であるから, $a+b$ と $a-b$ の偶奇は一致しない.

したがって, $c = 26$ のとき, 条件 (*) を満たす整数 a, b は存在しない. (答)

(2) $c = 4p^{2n}$ のとき

$$(a+b)(a-b) = 4p^{2n}$$

p は 3 以上の素数より奇数であり, n は正の整数であるから

$$(a+b, a-b) = (2p^{2n-k}, 2p^k) \quad (k \text{ は } 0 \leq k \leq n \text{ を満たす整数})$$

したがって, 条件 (*) を満たす整数の組 (a, b) は

$$(a, b) = (p^{2n-k} + p^k, p^{2n-k} - p^k) \quad (k \text{ は } 0 \leq k \leq n \text{ を満たす整数}) \quad \dots\dots (答)$$

(1) 2回目の操作終了時点ですべてのコインが裏向きとなるのは、コイン②と⑤を1回ずつ選ぶときであるから

$$p_2 = 2 \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{18} \quad \dots\dots (\text{答})$$

(2) コイン①, …, ⑥を選ぶ回数をそれぞれ a, b, c, d, e, f とする.

①が裏返されるのは、コイン②, ④を選んだときで、 $b+d$ 回

②が裏返されるのは、コイン①, ③, ⑤を選んだときで、 $a+c+e$ 回

③が裏返されるのは、コイン②, ⑥を選んだときで、 $b+f$ 回

④が裏返されるのは、コイン①, ⑤を選んだときで、 $a+e$ 回

⑤が裏返されるのは、コイン②, ④, ⑥を選んだときで、 $b+d+f$ 回

⑥が裏返されるのは、コイン③, ⑤を選んだときであるから、 $c+e$ 回

すべてのコインが裏向きであるための必要十分条件は、すべてのコインが奇数回裏返されることであるから、
 $b+d, a+c+e, b+f, a+e, b+d+f, c+e$ はすべて奇数である。よって、

$a = (a+c+e) - (c+e)$ は偶数であるから、 $e = (a+e) - a$ は奇数

$c = (a+c+e) - (a+e)$ は偶数

$d = (b+d+f) - (b+f)$ は偶数であるから、 $b = (b+d) - d$ は奇数

$f = (b+d+f) - (b+d)$ は偶数

したがって、 A に属するコインを②, ⑤, B に属するコインを①, ③, ④, ⑥とすればよい。……(答)

(3) $a+b+c+d+e+f=4$ であり、 a, c, d, f は0以上の偶数、 b, e は正の奇数である。

$b \geq 5$ とすると $a+b+c+d+e+f \geq 5$ となり不適。よって、 $b=1, 3$ である。

(ア) $b=3$ のとき。

$$a=c=d=f=0, e=1$$

となり、その確率は ${}_4C_3 \left(\frac{1}{6}\right)^3 \left(\frac{1}{6}\right) = \frac{4}{6^4}$ である。

(イ) $b=1$ のとき。

$$a=c=d=f=0, e=3$$

または

$e=1$ であり、 a, c, d, f のいずれか1つが2

となり、その確率は

$${}_4C_1 \left(\frac{1}{6}\right) \left(\frac{1}{6}\right)^3 + 4 \cdot \frac{4!}{2!} \left(\frac{1}{6}\right) \left(\frac{1}{6}\right) \left(\frac{1}{6}\right)^2 = \frac{52}{6^4}$$

したがって、

$$p_4 = \frac{4+52}{6^4} = \frac{7}{162} \quad \dots\dots (\text{答})$$