

2025年度 東北大学 前期 数学 文系

1

1回の試行(*)により、点Pは正の向きに1だけ進むか、負の向きに2だけ進む。

1回の試行(*)で、点Pが正の向きに1だけ進む事象をA、負の向きに2だけ進む事象をBとする。

事象Aが起こるのは

- ・ 硬貨を投げて表が出る
- ・ 硬貨を投げて裏が出る、かつ、さいころを投げて奇数の目が出る

のいずれかの場合であり、これらは排反であるから、その確率は

$$P(A) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{6} = \frac{3}{4}$$

である。また、事象Bが起こるのは

硬貨を投げて裏が出る、かつ、さいころを投げて偶数の目が出る

場合であるから、その確率は

$$P(B) = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{6} = \frac{1}{4}$$

である。 $P(A) = p$, $P(B) = q$ とおく。

試行(*)を繰り返したとき、事象Aが起こる回数を x 、事象Bが起こる回数を y とする。 (x, y) は0以上の整数

(1) 試行(*)を3回繰り返したとき、点Pが原点にもどっている条件は

$$\begin{cases} x + y = 3 \\ x - 2y = 0 \end{cases}$$

が成り立つことである。これを解くと

$$x = 2, \quad y = 1$$

である。したがって、求める確率は

$${}_3C_1 p^2 q = 3 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^2 \cdot \frac{1}{4} = \frac{27}{64} \quad \dots\dots (\text{答})$$

である。

(2) 試行(*)を6回繰り返したとき、点Pが原点にもどっている条件は

$$\begin{cases} x + y = 6 \\ x - 2y = 0 \end{cases}$$

が成り立つことである。これを解くと

$$x = 4, \quad y = 2$$

である。したがって、求める確率は

$${}_6C_2 p^4 q^2 = 15 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^4 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{1215}{4096} \quad \dots\dots (\text{答})$$

である。

(3) 試行(*)を n 回繰り返したとき、点 P が原点にもどっている条件は

$$\begin{cases} x + y = n \\ x - 2y = 0 \end{cases}$$

が成り立つことである。これを解くと

$$x = \frac{2n}{3}, \quad y = \frac{n}{3}$$

となるが n は 3 で割り切れない正の整数であるから、 x, y はともに整数とならない。したがって、試行(*)を n 回繰り返したとき、点 P が原点にもどっていることはないので、求める確率は

0 …… (答)

である。

2つの数列 $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ は、正の実数からなる数列である ①

$$x_1 = 2 \quad \text{..... ②}$$

$$y_1 = \frac{1}{2} \quad \text{..... ③}$$

$$x_{n+1} = (x_n)^5 (y_n)^2 \quad \text{..... ④}$$

$$y_{n+1} = x_n (y_n)^6 \quad \text{..... ⑤}$$

(1) ②, ③より

$$\begin{cases} \log_2 x_1 = \log_2 2 \\ \log_2 y_1 = \log_2 \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\therefore \begin{cases} a_1 = 1 & \text{..... ②'} \\ b_1 = -1 & \text{..... ③'} \end{cases}$$

である.

また, ①により④と⑤の両辺は正であるから

$$\begin{cases} \log_2 x_{n+1} = \log_2 ((x_n)^5 (y_n)^2) \\ \log_2 y_{n+1} = \log_2 (x_n (y_n)^6) \end{cases} \quad \therefore \begin{cases} \log_2 x_{n+1} = 5 \log_2 x_n + 2 \log_2 y_n \\ \log_2 y_{n+1} = \log_2 x_n + 6 \log_2 y_n \end{cases}$$

である. ゆえに

$$\begin{cases} a_{n+1} = 5a_n + 2b_n & \text{..... ④'} \\ b_{n+1} = a_n + 6b_n & \text{..... ⑤'} \end{cases}$$

である. ここで

$$c_n = a_n + kb_n$$

とおく.

数列 $\{c_n\}$ が等比数列になる

ということは

「すべての自然数 n に対して $c_{n+1} = rc_n$ が成り立つ」となるような, 定数 r が存在する
ということと同値である.

ここで, $c_{n+1} = rc_n$ は

$$a_{n+1} + kb_{n+1} = r(a_n + kb_n)$$

$$\therefore (5a_n + 2b_n) + k(a_n + 6b_n) = r(a_n + kb_n) \quad (\because \text{④'}, \text{⑤'})$$

$$\therefore (5+k)a_n + (2+6k)b_n = ra_n + rkb_n \quad \text{..... ⑥}$$

と変形できる.

⑥がすべての自然数 n に対して成り立つためには

$n = 1$ および $n = 2$ のときに成り立たなければならないから

$$\begin{aligned} & \begin{cases} (5+k)a_1 + (2+6k)b_1 = ra_1 + rkb_1 \\ (5+k)a_2 + (2+6k)b_2 = ra_2 + rkb_2 \end{cases} \\ \therefore & \begin{cases} (5+k) \cdot 1 + (2+6k) \cdot (-1) = r \cdot 1 + rk \cdot (-1) \\ (5+k) \cdot 3 + (2+6k) \cdot (-5) = r \cdot 3 + rk \cdot (-5) \end{cases} \\ & \left(\begin{array}{l} \text{②'}, \text{③'}, \text{④'}, \text{⑤'} \text{ から} \\ a_2 = 5a_1 + 2b_1 = 5 \cdot 1 + 2 \cdot (-1) = 3 \\ b_2 = a_1 + 6b_1 = 1 + 6 \cdot (-1) = -5 \\ \text{である. このことも用いた} \end{array} \right) \\ \therefore & \begin{cases} 5+k = r & (\leftarrow \text{上式の 5 倍から下式を引いて, 2 で割ると得られる}) \\ 2+6k = rk & (\leftarrow \text{上式の 3 倍から下式を引いて, 2 で割ると得られる}) \end{cases} \dots\dots\dots \text{⑦} \end{aligned}$$

でなければならない.

逆に, ⑦が成り立つならば, すべての自然数 n に対して⑥が成り立つ.

ゆえに

$$\begin{aligned} & \text{すべての自然数 } n \text{ に対して } c_{n+1} = rc_n \text{ が成り立つ} \\ \iff & \text{すべての自然数 } n \text{ に対して ⑥ が成り立つ} \\ \iff & \text{⑦ が成り立つ} \\ \iff & (k, r) = (2, 7), (-1, 4) \dots\dots\dots \text{⑧} \end{aligned}$$

である.

ゆえに, 求める k の値は

$$k = 2, -1 \dots\dots\dots \text{(答)}$$

ですべてである.

(2) ⑧から

(ア) $k = 2$ のとき, $c_{n+1} = 7c_n$ がすべての自然数 n に対して成り立つ.

(イ) $k = -1$ のとき, $c_{n+1} = 4c_n$ がすべての自然数 n に対して成り立つ.

がいえる.

(ア) により, 数列 $\{a_n + 2b_n\}$ は公比 7 の等比数列である.

初項は $a_1 + 2b_1 = -1$ であるから, 一般項は

$$a_n + 2b_n = -7^{n-1} \dots\dots\dots \text{⑨}$$

である.

(イ) により, 数列 $\{a_n - b_n\}$ は公比 4 の等比数列である.

初項は $a_1 - b_1 = 2$ であるから, 一般項は

$$a_n - b_n = 2 \cdot 4^{n-1} \dots\dots\dots \text{⑩}$$

である.

⑨ + ⑩ $\times 2$ より

$$3a_n = 4^n - 7^{n-1}$$

$$\therefore a_n = \frac{4^n - 7^{n-1}}{3}$$

$$\therefore \log_2 x_n = \frac{4^n - 7^{n-1}}{3}$$

であるから、数列 $\{x_n\}$ の一般項は

$$x_n = 2^{\frac{4^n - 7^{n-1}}{3}}$$

…… (答)

である.

(補足)

本問 (1) の問題文は

「数列 $\{a_n + kb_n\}$ が等比数列となるような k の値をすべて求めよ」

となっているので、数列 $\{a_n + kb_n\}$ が等比数列となるための 必要十分条件 を求めるのが

「隙のない解答」であろうと考えて、上のようにした.

一般に、数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ があって、 A, B, C, D を n と無関係な定数とするとき

$$\begin{cases} A = C \\ B = D \end{cases} \implies \text{すべての自然数 } n \text{ に対して } Aa_n + Bb_n = Ca_n + Db_n \text{ が成り立つ}$$

は正しいけれども

$$\text{すべての自然数 } n \text{ に対して } Aa_n + Bb_n = Ca_n + Db_n \text{ が成り立つ} \implies \begin{cases} A = C \\ B = D \end{cases}$$

は正しくない.

$$\left(\begin{array}{l} \text{反例はいろいろあるが,} \\ \text{たとえば, すべての自然数 } n \text{ に対して } a_n = b_n \text{ が成り立つ場合には} \\ (A, B, C, D) = (1, 3, 2, 2) \text{ などであっても,} \\ \text{すべての自然数 } n \text{ に対して } Aa_n + Bb_n = Ca_n + Db_n \text{ が成り立つ.} \end{array} \right)$$

本問の場合は

$$\textcircled{7} \implies \text{すべての自然数 } n \text{ に対して } \textcircled{6} \text{ が成り立つ}$$

はすぐに言えることであるが

$$\text{すべての自然数 } n \text{ に対して } \textcircled{6} \text{ が成り立つ} \implies \textcircled{7}$$

は「⑥の両辺の係数を見比べるだけでは言えないこと」である.

なお、出題者がそこまで要求していたかどうかはわからないし、答えまでたどり着いた受験生であっても、そのほとんどは「隙のない解答」を書いてはいないだろう.

3 (1) $\overrightarrow{AD} = 3\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC}$ …… ① より, $\overrightarrow{AD} = 5 \left(\frac{3\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC}}{5} \right)$

$\overrightarrow{AE} = \frac{3\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC}}{5}$ とおくと, 点 E は線分 BC を 2 : 3 に内分する点である. また, $\overrightarrow{AD} = 5\overrightarrow{AE}$ より, 点 E は線分 AD を 1 : 4 に内分する点である.

ゆえに, $\triangle ABC : \triangle DCB = AE : ED = 1 : 4$ であるから,
四角形 ABDC の面積を T とすると

$$T = \triangle ABC + \triangle DCB = \triangle ABC + 4\triangle ABC = 5\triangle ABC$$

より, $\triangle ABC : T = 1 : 5$ である.

$\triangle ABC$ と四角形 ABDC をそれぞれ底面とみると, 四面体 OABC と四角錐 OABDC の高さは共通である.

したがって, 四角錐 OABDC の体積は

$$5V$$

……(答)

である.

(2) ① より

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OD} &= \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AD} \\ &= \overrightarrow{OA} + 3\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC} \\ &= \vec{a} + 3(\vec{b} - \vec{a}) + 2(\vec{c} - \vec{a}) \\ &= -4\vec{a} + 3\vec{b} + 2\vec{c} \end{aligned}$$

……(答)

と表される.

(3) (1) の議論より, 点 E が線分 AD と線分 BC の交点 P に他ならない.

よって, $BP : PC = 2 : 3$ より

$$\overrightarrow{OP} = \frac{3}{5}\vec{b} + \frac{2}{5}\vec{c}$$

……(答)

と表される.

(4) 四面体 OABC が 1 辺の長さ 1 の正四面体のとき, 4 つの面はすべて 1 辺の長さ 1 の正三角形であるから

$$|\vec{a}| = |\vec{b}| = |\vec{c}| = 1, \quad \vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{c} = \vec{c} \cdot \vec{a} = 1 \times 1 \times \cos 60^\circ = \frac{1}{2}$$

であり, これらと (2) の結果から

$$\begin{aligned} |\overrightarrow{OD}|^2 &= |-4\vec{a} + 3\vec{b} + 2\vec{c}|^2 \\ &= 16|\vec{a}|^2 + 9|\vec{b}|^2 + 4|\vec{c}|^2 - 24\vec{a} \cdot \vec{b} + 12\vec{b} \cdot \vec{c} - 16\vec{c} \cdot \vec{a} \\ &= 15 \end{aligned}$$

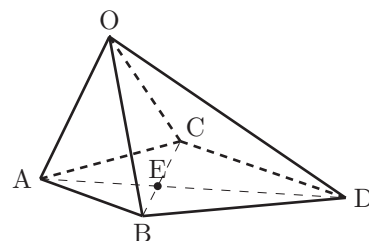
となる.

よって, 線分 OD の長さは

$$\sqrt{15}$$

……(答)

である.



[補足] (1) と (3) は、上記の解答で定義した点 E を用いずに解くこともできる.

(1) において, $\overrightarrow{AX} = 3\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AY} = 2\overrightarrow{AC}$ と定めると

$$\overrightarrow{AD} = 3\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AX} + \overrightarrow{AY}$$

であるから, 四角形 AXDY は平行四辺形である.

このとき

$$\triangle ABD = \triangle ABY = 2\triangle ABC, \quad \triangle ADC = \triangle AXC = 3\triangle ABC$$

である.

ゆえに, 四角形 ABDC の面積を T とすると

$$T = \triangle ABD + \triangle ADC = 2\triangle ABC + 3\triangle ABC = 5\triangle ABC$$

となることから, 四角錐 OABDC の体積は $5V$ である.

また, (3) において, 線分 AD と BC の交点を P とするとき, 3 点 A, P, D は一直線上にあるから, 実数 k を用いて

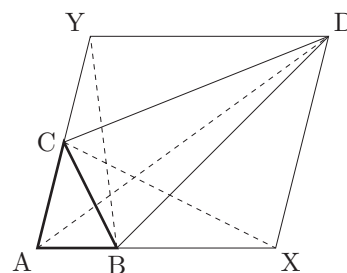
$$\overrightarrow{AP} = k\overrightarrow{AD} = 3k\overrightarrow{AB} + 2k\overrightarrow{AC}$$

と表せ, さらに, 点 P は線分 BC 上にあるから

$$3k + 2k = 1 \quad \therefore \quad k = \frac{1}{5}$$

であるから, $\overrightarrow{AP} = \frac{3\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC}}{5}$ より, 点 P は線分 BC を 2:3 に内分する点であることがわかる.

よって, $\overrightarrow{OP} = \frac{3}{5}\overrightarrow{b} + \frac{2}{5}\overrightarrow{c}$ である.



4 $f(x) = x(x-2)^2$, $g(x) = kx^2$ とおく.

$$\begin{aligned} f(x) - g(x) &= x(x-2)^2 - kx^2 \\ &= x\{x^2 - (k+4)x + 4\} \end{aligned}$$

であり

$$x^2 - (k+4)x + 4 = 0 \quad \dots\dots ①$$

の判別式を D とすると, $k > 0$ より

$$D = (k+4)^2 - 16 = k^2 + 8k > 0$$

であり, ①は $x = 0$ を解にもたないから,

方程式 $f(x) - g(x) = 0$ は異なる 3 つの実数解をもつ.

①の 2 つの実数解を α , β ($\alpha < \beta$) とすると, 解と係数の関係より

$$\alpha + \beta = k + 4, \quad \alpha\beta = 4$$

であり, $k > 0$ より $0 < \alpha < \beta$ である.

よって, 2 曲線で囲まれた 2 つの部分の面積が等しくなる条件は

$$\int_0^\alpha \{f(x) - g(x)\} dx = \int_\alpha^\beta \{g(x) - f(x)\} dx$$

が成立することである. これを変形すると

$$\begin{aligned} \int_0^\alpha \{f(x) - g(x)\} dx - \int_\alpha^\beta \{g(x) - f(x)\} dx &= 0 \\ \therefore \int_0^\alpha \{f(x) - g(x)\} dx + \int_\alpha^\beta \{f(x) - g(x)\} dx &= 0 \\ \therefore \int_0^\beta \{f(x) - g(x)\} dx &= 0 \quad \dots\dots (*) \end{aligned}$$

となる. すなわち

$$\int_0^\beta \{x^3 - (k+4)x^2 + 4x\} dx = 0$$

となる.

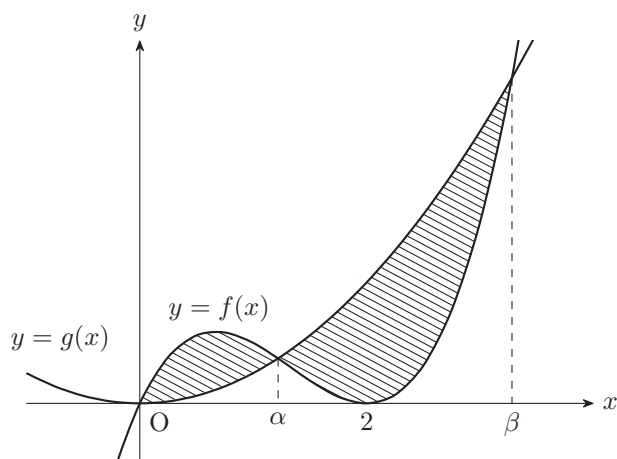
$$\begin{aligned} \int_0^\beta \{x^3 - (k+4)x^2 + 4x\} dx &= \left[\frac{1}{4}x^4 - \frac{k+4}{3}x^3 + 2x^2 \right]_0^\beta \\ &= \frac{1}{4}\beta^4 - \frac{k+4}{3}\beta^3 + 2\beta^2 \end{aligned}$$

より, $\beta \neq 0$ にも注意すると, (*) が成り立つ条件は

$$\begin{aligned} \frac{1}{4}\beta^4 - \frac{k+4}{3}\beta^3 + 2\beta^2 &= 0 \\ \therefore 3\beta^2 - 4(k+4)\beta + 24 &= 0 \quad \dots\dots ② \end{aligned}$$

となることである. β は①の解であることから

$$\begin{aligned} \beta^2 - (k+4)\beta + 4 &= 0 \\ \therefore (k+4)\beta &= \beta^2 + 4 \quad \dots\dots ③ \end{aligned}$$



である. ③を②に代入して, $\beta > 0$ に注意して解くと

$$\begin{aligned}3\beta^2 - 4(\beta^2 + 4) + 24 &= 0 \\ \therefore \beta^2 &= 8 \\ \therefore \beta &= 2\sqrt{2} \quad (\text{このとき } \alpha\beta = 4 \text{ より } \alpha = \sqrt{2} \text{ となる})\end{aligned}$$

である. これを③に代入すると

$$\begin{aligned}2\sqrt{2}(k+4) &= 12 \\ \therefore k &= 3\sqrt{2} - 4 \quad (\text{これは } k > 0 \text{ を満たす}) \quad \dots\dots (\text{答})\end{aligned}$$

である.

別解 (*) 以降は次のように計算することもできる.

方程式 $f(x) - g(x) = 0$ の解が $x = 0, \alpha, \beta$ であることと, $f(x) - g(x)$ は x^3 の係数が 1 である 3 次式であることにより

$$f(x) - g(x) = x(x - \alpha)(x - \beta)$$

が成り立つ. よって

$$\begin{aligned}\int_0^\beta \{f(x) - g(x)\} dx &= 0 \\ \therefore \int_0^\beta x(x - \alpha)(x - \beta) dx &= 0 \\ \therefore \int_0^\beta \{x^3 - (\alpha + \beta)x^2 + \alpha\beta x\} dx &= 0 \\ \therefore \left[\frac{1}{4}x^4 - \frac{\alpha + \beta}{3}x^3 + \frac{1}{2}\alpha\beta x^2 \right]_0^\beta &= 0 \\ \therefore \frac{1}{4}\beta^4 - \frac{\alpha + \beta}{3} \cdot \beta^3 + \frac{1}{2}\alpha\beta^3 &= 0\end{aligned}$$

であり, $\beta \neq 0$ であるから

$$\begin{aligned}\frac{1}{4}\beta - \frac{\alpha + \beta}{3} + \frac{1}{2}\alpha &= 0 \\ \therefore 3\beta - 4(\alpha + \beta) + 6\alpha &= 0 \\ \therefore \beta &= 2\alpha \quad \dots\dots ④\end{aligned}$$

である. ここで, α, β は①の解であるから, 解と係数の関係

$$\alpha + \beta = k + 4, \quad \alpha\beta = 4$$

に④を代入すると

$$3\alpha = k + 4, \quad 2\alpha^2 = 4$$

であり, $\alpha > 0$ であることから

$$\alpha = \sqrt{2}, \quad k = 3\sqrt{2} - 4 \quad \dots\dots (\text{答})$$

である.