2025年度 東北大学 前期 数学 理系

$\boxed{1}$

1 回の試行 $(*)$ により，点 P は正の向きに 1 だけ進むか，負の向きに 2 だけ進む.

1 回の試行 $(*)$ で，点 P が正の向きに 1 だけ進む事象を A，負の向きに 2 だけ進む事象を B とする.
事象 A が起こるのは

- 硬貨を投げて表が出る
- 硬貨を投げて裏が出る，かつ，さいころを投げて奇数の目が出る

のいずれかの場合であり，これらは排反であるから，その確率は

$$P(A) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{6} = \frac{3}{4}$$

である．また，事象 B が起こるのは

硬貨を投げて裏が出る，かつ，さいころを投げて偶数の目が出る

場合であるから，その確率は

$$P(B) = \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{6} = \frac{1}{4}$$

である．$P(A) = p$，$P(B) = q$ とおく.

試行 $(*)$ を繰り返したとき，事象 A が起こる回数を x，事象 B が起こる回数を y とする．(x，y は 0 以上の整数)

(1) 試行 $(*)$ を 3 回繰り返したとき，点 P が原点にもどっている条件は

$$\begin{cases} x + y = 3 \\ x - 2y = 0 \end{cases}$$

が成り立つことである．これを解くと

$$x = 2,\quad y = 1$$

である．したがって，求める確率は

$${}_3\mathrm{C}_1 p^2 q = 3\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^2\cdot\frac{1}{4} = \frac{27}{64} \quad \cdots\cdots \text{(答)}$$

である.

(2) 試行 $(*)$ を 6 回繰り返したとき，点 P が原点にもどっている条件は

$$\begin{cases} x + y = 6 \\ x - 2y = 0 \end{cases}$$

が成り立つことである．これを解くと

$$x = 4,\quad y = 2$$

である．したがって，求める確率は

$${}_6\mathrm{C}_2 p^4 q^2 = 15\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^4\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{1215}{4096} \quad \cdots\cdots \text{(答)}$$

である.

(3) 試行 $(*)$ を n 回繰り返したとき，点 P が原点にもどっている条件は

$$\begin{cases} x+y=n \\ x-2y=0 \end{cases}$$

が成り立つことである．これを解くと

$$x=\frac{2n}{3},\quad y=\frac{n}{3}$$

となるが n は 3 で割り切れない正の整数であるから，x，y はともに整数とならない．したがって，試行 $(*)$ を n 回繰り返したとき，点 P が原点にもどっていることはないので，求める確率は

$0 \quad \cdots\cdots$ (答)

である．

2

2 つの数列 $\{x_n\}$，$\{y_n\}$ は，正の実数からなる数列である ……①

$x_1 = 2$ ……②

$y_1 = \dfrac{1}{2}$ ……③

$x_{n+1} = (x_n)^5 (y_n)^2$ ……④

$y_{n+1} = x_n (y_n)^6$ ……⑤

(1) ②，③より

$$\begin{cases} \log_2 x_1 = \log_2 2 \\ \log_2 y_1 = \log_2 \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

$$\therefore \begin{cases} a_1 = 1 & \cdots\cdots ②' \\ b_1 = -1 & \cdots\cdots ③' \end{cases}$$

である．

また，①により④と⑤の両辺は正であるから

$$\begin{cases} \log_2 x_{n+1} = \log_2\Big((x_n)^5 (y_n)^2\Big) \\ \log_2 y_{n+1} = \log_2\Big(x_n (y_n)^6\Big) \end{cases} \qquad \therefore \begin{cases} \log_2 x_{n+1} = 5\log_2 x_n + 2\log_2 y_n \\ \log_2 y_{n+1} = \log_2 x_n + 6\log_2 y_n \end{cases}$$

である．ゆえに

$$\begin{cases} a_{n+1} = 5a_n + 2b_n & \cdots\cdots ④' \\ b_{n+1} = a_n + 6b_n & \cdots\cdots ⑤' \end{cases}$$

である．ここで

$c_n = a_n + kb_n$

とおく．

数列 $\{c_n\}$ が等比数列になる

ということは

「すべての自然数 n に対して $c_{n+1} = rc_n$ が成り立つ」となるような，定数 r が存在する

ということと同値である．

ここで，$c_{n+1} = rc_n$ は

$a_{n+1} + kb_{n+1} = r(a_n + kb_n)$

$\therefore\ (5a_n + 2b_n) + k(a_n + 6b_n) = r(a_n + kb_n) \qquad (\because ④', ⑤')$

$\therefore\ (5+k)a_n + (2+6k)b_n = ra_n + rkb_n$ ……⑥

と変形できる．

⑥がすべての自然数 n に対して成り立つためには

$n=1$ および $n=2$ のときに成り立たなければならないから

$$\begin{cases}(5+k)a_1+(2+6k)b_1=ra_1+rkb_1\\(5+k)a_2+(2+6k)b_2=ra_2+rkb_2\end{cases}$$

$$\therefore\ \begin{cases}(5+k)\cdot1+(2+6k)\cdot(-1)=r\cdot1+rk\cdot(-1)\\(5+k)\cdot3+(2+6k)\cdot(-5)=r\cdot3+rk\cdot(-5)\end{cases}$$

(②′, ③′, ④′, ⑤′ から

$a_2=5a_1+2b_1=5\cdot1+2\cdot(-1)=3$

$b_2=a_1+6b_1=1+6\cdot(-1)=-5$

である．このことも用いた)

$$\therefore\ \begin{cases}5+k=r & (\leftarrow \text{上式の}5\text{倍から下式を引いて，}2\text{で割ると得られる})\\2+6k=rk & (\leftarrow \text{上式の}3\text{倍から下式を引いて，}2\text{で割ると得られる})\end{cases} \quad \cdots\cdots ⑦$$

でなければならない．

逆に，⑦が成り立つならば，すべての自然数 n に対して⑥が成り立つ．

ゆえに

　すべての自然数 n に対して $c_{n+1}=rc_n$ が成り立つ

$\Longleftrightarrow$ すべての自然数 n に対して⑥が成り立つ

$\Longleftrightarrow$ ⑦が成り立つ

$\Longleftrightarrow (k,\ r)=(2,\ 7),\ (-1,\ 4)$ ……⑧

である．

ゆえに，求める k の値は

$k=2,\ -1$ ……(答)

ですべてである．

(2) ⑧から

(ア) $k=2$ のとき，$c_{n+1}=7c_n$ がすべての自然数 n に対して成り立つ．

(イ) $k=-1$ のとき，$c_{n+1}=4c_n$ がすべての自然数 n に対して成り立つ．

がいえる．

(ア) により，数列 $\{a_n+2b_n\}$ は公比 7 の等比数列である．

初項は $a_1+2b_1=-1$ であるから，一般項は

$a_n+2b_n=-7^{n-1}$ ……⑨

である．

(イ) により，数列 $\{a_n-b_n\}$ は公比 4 の等比数列である．

初項は $a_1-b_1=2$ であるから，一般項は

$a_n-b_n=2\cdot4^{n-1}$ ……⑩

である．

⑨ + ⑩×2 より

$$3a_n = 4^n - 7^{n-1}$$

$$\therefore\ a_n = \frac{4^n - 7^{n-1}}{3}$$

$$\therefore\ \log_2 x_n = \frac{4^n - 7^{n-1}}{3}$$

であるから，数列 $\{x_n\}$ の一般項は

$$x_n = 2^{\frac{4^n - 7^{n-1}}{3}} \qquad \cdots\cdots \text{(答)}$$

である．

(補足)

本問 (1) の問題文は

「数列 $\{a_n + kb_n\}$ が等比数列となるような k の値をすべて求めよ」

となっているので，数列 $\{a_n + kb_n\}$ が等比数列となるための 必要十分条件 を求めるのが

「隙のない解答」であろうと考えて，上のようにした．

一般に，数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ があって，A, B, C, D を n と無関係な定数とするとき

$$\begin{cases} A = C \\ B = D \end{cases} \Longrightarrow \text{すべての自然数 } n \text{ に対して } Aa_n + Bb_n = Ca_n + Db_n \text{ が成り立つ}$$

は正しいけれども

$$\text{すべての自然数 } n \text{ に対して } Aa_n + Bb_n = Ca_n + Db_n \text{ が成り立つ} \Longrightarrow \begin{cases} A = C \\ B = D \end{cases}$$

は正しくない．

(
反例はいろいろあるが,
たとえば, すべての自然数 n に対して $a_n = b_n$が成り立つ場合には
$(A,\ B,\ C,\ D) = (1,\ 3,\ 2,\ 2)$ などであっても,
すべての自然数 n に対して $Aa_n + Bb_n = Ca_n + Db_n$が成り立つ.
)

本問の場合は

⑦ $\Longrightarrow$ すべての自然数 n に対して⑥が成り立つ

はすぐに言えることであるが

すべての自然数 n に対して⑥が成り立つ $\Longrightarrow$ ⑦

は「⑥の両辺の係数を見比べるだけでは言えないこと」である．

なお，出題者がそこまで要求していたかどうかはわからないし，答えまでたどり着いた受験生であっても，そのほとんどは「隙のない解答」を書いてはいないだろう．

$\boxed{3}$

$$f'(x) = 2x(2x^2 + 2ax + a + 2)$$

であり, $g(x) = 2x^2 + 2ax + a + 2$ とおくと

$$f'(x) = 2xg(x)$$

となる. また, $g(x) = 0$ の判別式を D とすると

$$\frac{D}{4} = a^2 - 2(a+2) = a^2 - 2a - 4$$

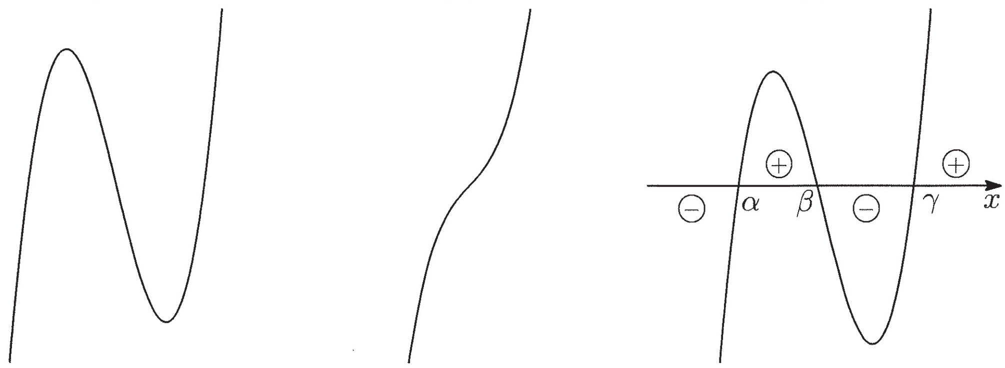
である.

(1) $\qquad f(x)$ が極大値をもつ

$\iff f'(x)$ が正から負への符号変化をすることがある $\qquad \cdots\cdots (*)$

である. また, $f'(x)$ の x^3 の係数が正であることより, 曲線 $y = f'(x)$ の概形は「$f'(x)$ が極大値と極小値を 1 つずつもつ場合 (図 1)」と「$f'(x)$ が極値をもたない場合 (図 2)」のいずれかである.

図 1 $\qquad$ 図 2 $\qquad$ 図 3



$(*)$ であるためには $f'(x)$ が減少する区間をもつことが必要であるから, 図 1 の場合を考えればよい. よって, $(*)$ となる条件は, 曲線 $y = f'(x)$ と x 軸が図 3 のように相異なる 3 点で交わること (このとき $f(x)$ は $x = \beta$ で極大値をとる) であるから

$(*) \iff f'(x) = 0$ が相異なる 3 つの実数解をもつ

$\iff g(x) = 0$ が相異なる 2 つの「0 以外の実数解」をもつ

$\iff \dfrac{D}{4} > 0$ かつ $g(0) \neq 0$

$\iff$「$a < 1 - \sqrt{5}$ または $1 + \sqrt{5} < a$」かつ $a \neq -2$

$\iff a < -2$ または $-2 < a < 1 - \sqrt{5}$ または $1 + \sqrt{5} < a$ $\qquad \cdots\cdots$ ①(答)

である.

(2) 図 3 の α, β, γ を考える. $f(x)$ が $x = 0$ で極大値をもつ条件は, ①かつ $\beta = 0$ であり

$\beta = 0$

$\iff \alpha < 0 < \gamma$

$\iff g(x) = 0$ が正と負の解をもつ ($\because$ $\beta = 0$ のとき $g(x) = 0$ の 2 解が α, γ となる)

$\iff g(0) < 0$

$\iff a < -2$ $\qquad \cdots\cdots$ ②

であるから, ①かつ②より

$a < -2$ $\qquad \cdots\cdots$(答)

である.

$\boxed{4}$

(1) $f(x)=n\log x$，$g(x)=ax^n$ より，$f'(x)=\dfrac{n}{x}$，$g'(x)=anx^{n-1}$ である．

2 つの曲線 $y=f(x)$，$y=g(x)$ の共有点の x 座標を t $(t>0)$ とする．2 つの曲線が $x=t$ で共有点をもち，その共有点における 2 つの曲線の接線が一致していることは，

$$\begin{cases} f(t)=g(t) \\ f'(t)=g'(t) \end{cases} \quad \text{すなわち} \quad \begin{cases} n\log t=at^n & \cdots\cdots①\\ \dfrac{n}{t}=ant^{n-1} & \cdots\cdots② \end{cases}$$

が成り立つことと同値である．②を変形すると，

$$a=t^{-n} \qquad \cdots\cdots③$$

となる．③を①に代入すると，

$$n\log t=1 \quad \text{すなわち} \quad t=e^{\frac{1}{n}} \qquad \cdots\cdots④$$

となる．よって，③より，

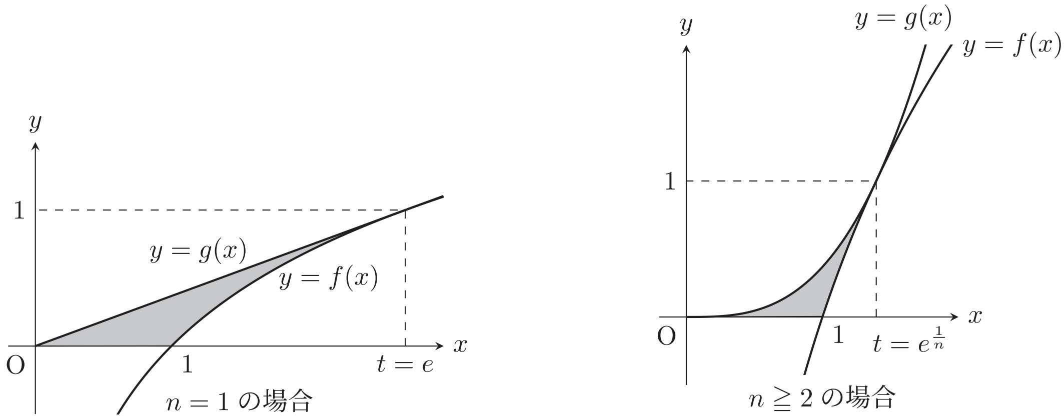
$$a=\left(e^{\frac{1}{n}}\right)^{-n}=e^{-1} \qquad \cdots\cdots⑤(\text{答})$$

である．

(2) 曲線 $y=f(x)$ は上に凸であり，$x=1$ で x 軸と交わる．

$n=1$ のとき，曲線 $y=g(x)$ は原点を通る直線である．$n\geqq 2$ のとき，曲線 $y=g(x)$ は $x\geqq 0$ の範囲で下に凸であり，$x=0$ で x 軸と接する．

よって，2 つの曲線と x 軸で囲まれた部分は，下図の網掛け部分である．



いずれの場合においても，求める面積 S_n は，

$$\begin{aligned} S_n &= \int_0^t g(x)\,dx-\int_1^t f(x)\,dx=\int_0^t ax^n\,dx-\int_1^t n\log x\,dx \\ &= \left[\frac{a}{n+1}x^{n+1}\right]_0^t-n\Big[x\log x-x\Big]_1^t=\frac{at^{n+1}}{n+1}-n(t\log t-t+1) \end{aligned}$$

であり，④，⑤を代入すると，

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{1}{n+1}\cdot e^{-1}\cdot e^{\frac{n+1}{n}}-n\left(e^{\frac{1}{n}}\cdot\frac{1}{n}-e^{\frac{1}{n}}+1\right) \\ &= \frac{1}{n+1}e^{\frac{1}{n}}-e^{\frac{1}{n}}+ne^{\frac{1}{n}}-n & \cdots\cdots⑥ \\ &= \frac{n^2}{n+1}e^{\frac{1}{n}}-n & \cdots\cdots(\text{答}) \end{aligned}$$

である．

(3)　$u=\dfrac{1}{n}$ とおくと，$n=\dfrac{1}{u}$ であり，$n\to\infty$ のとき，$u\to+0$ である．また，S_n を u を用いて表すと，⑥より，

$$S_n=\frac{1}{\frac{1}{u}+1}e^u-e^u+\frac{1}{u}e^u-\frac{1}{u}=\frac{u}{1+u}e^u-e^u+\frac{e^u-1}{u}$$

となる．よって，$\displaystyle\lim_{u\to+0}e^u=1$，$\displaystyle\lim_{u\to+0}\frac{e^u-1}{u}=1$ より，

$$\lim_{n\to\infty}S_n=\frac{0}{1+0}\cdot1-1+1=0 \qquad \cdots\cdots(答)$$

である．

$\boxed{5}$

(1) Qは直線NP上にあるから,

$$\overrightarrow{\mathrm{OQ}} = \overrightarrow{\mathrm{ON}} + s\overrightarrow{\mathrm{NP}}$$

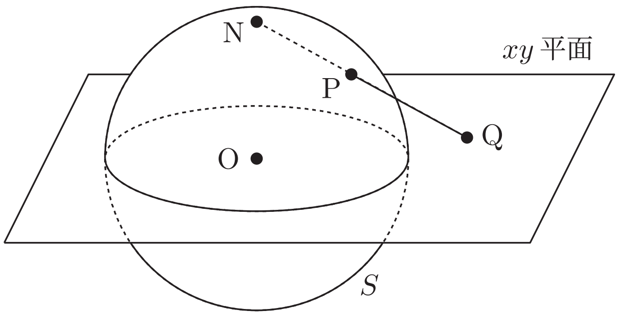
となる実数sが存在する．このとき,

$$\overrightarrow{\mathrm{OQ}} = (0,\ 0,\ 1) + s(a,\ b,\ c-1)$$

より，Qの座標は

$$(as,\ bs,\ (c-1)s+1)$$

となる．$\mathrm{P} \neq \mathrm{N}$より$c \neq 1$で，Qの$z$座標が0であることより



$$s = \frac{1}{1-c}$$

であるから，Qの座標は

$$\left(\frac{a}{1-c},\ \frac{b}{1-c},\ 0\right) \quad \cdots\cdots (答)$$

である．

(2) lがmに一致した場合を考えればよい．このときQは点$(p,\ q,\ 0)$となり，求める点の座標はPの座標となる．Pは直線NQのN以外の部分に属するから,

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \overrightarrow{\mathrm{ON}} + t\overrightarrow{\mathrm{NQ}}$$

となる0でない実数tが存在する．このとき，$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = (0,\ 0,\ 1) + t(p,\ q,\ -1)$より，Pの座標は

$$(pt,\ qt,\ 1-t)$$

となる．今，PがS上にあることより,

$$(pt)^2 + (qt)^2 + (1-t)^2 = 1$$

すなわち

$$t((p^2+q^2+1)t-2) = 0$$

で，これと$t \neq 0$より

$$t = \frac{2}{p^2+q^2+1}$$

である．よって，Pの座標は

$$\left(\frac{2p}{p^2+q^2+1},\ \frac{2q}{p^2+q^2+1},\ \frac{p^2+q^2-1}{p^2+q^2+1}\right) \quad \cdots\cdots ①(答)$$

である．

(3) αの方程式は，$3(x-0)+4(y-0)+5\left(z-\frac{1}{2}\right)=0$，すなわち

$$3x+4y+5z = \frac{5}{2}$$

である．よって，S上の点①がα上にあるための条件は

$$3\cdot\frac{2p}{p^2+q^2+1} + 4\cdot\frac{2q}{p^2+q^2+1} + 5\cdot\frac{p^2+q^2-1}{p^2+q^2+1} = \frac{5}{2}$$

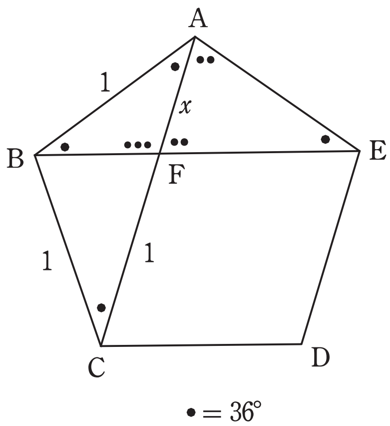
であり，分母を払って整理すると

$$\left(p+\frac{6}{5}\right)^2 + \left(q+\frac{8}{5}\right)^2 = 7$$

となる．よって，Qはxy平面上の円$\left(x+\frac{6}{5}\right)^2 + \left(y+\frac{8}{5}\right)^2 = 7$上を動く．　(証明終わり)

$\boxed{6}$

(1)　右図のように正五角形 ABCDE において，対角線 AC と BE の交点を F とする．線分 AF の長さを x とすると，$\triangle\mathrm{FAB} \backsim \triangle\mathrm{BCA}$ より



$$\mathrm{FA} : \mathrm{BC} = \mathrm{AB} : \mathrm{CA}$$
$$x : 1 = 1 : (1+x)$$

よって

$$x(1+x)=1$$

すなわち

$$x^2+x-1=0$$

$x>0$ より

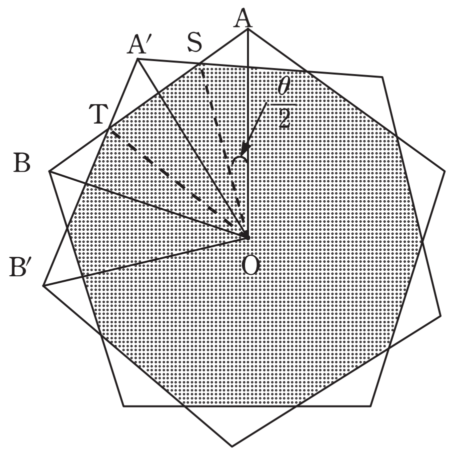
$$x=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$$

したがって，K の対角線の長さは

$$1+x=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

である．

(2)　K の外接円の中心を O とする．P と P_θ の共通部分は右下図の網掛けの部分である．K を O の周りに角 θ だけ回転して，図の点 A, B がそれぞれ点 A′, B′ に移ったとする．図のように点 S, T を定めると，対称性を考えて



$\triangle\mathrm{OAS} \equiv \triangle\mathrm{OA'S}$，$\triangle\mathrm{OA'T} \equiv \triangle\mathrm{OBT}$

であるから

$$\angle\mathrm{AOS}=\frac{\theta}{2}\ ,\quad \angle\mathrm{SOT}=\frac{1}{2}\angle\mathrm{AOB}=36^\circ$$

であり，

$$\angle\mathrm{OAS}=54^\circ\ ,\ \angle\mathrm{OSA}=180^\circ-\left(54^\circ+\frac{\theta}{2}\right)=126^\circ-\frac{\theta}{2}$$

$$\angle\mathrm{AOT}=\frac{\theta}{2}+36^\circ$$

$$\angle\mathrm{OTA}=180^\circ-\left(54^\circ+\frac{\theta}{2}+36^\circ\right)=90^\circ-\frac{\theta}{2}$$

である．

$\triangle\mathrm{OAS}$ に正弦定理を用いて

$$\frac{\mathrm{AS}}{\sin\dfrac{\theta}{2}}=\frac{\mathrm{OA}}{\sin\left(126^\circ-\dfrac{\theta}{2}\right)}$$

よって

$$\mathrm{AS}=\frac{\sin\frac{\theta}{2}}{\sin\left(126^\circ-\frac{\theta}{2}\right)}\mathrm{OA}$$

である．また，△OAT に正弦定理を用いて

$$\frac{\mathrm{AT}}{\sin\left(\frac{\theta}{2}+36^\circ\right)}=\frac{\mathrm{OA}}{\sin\left(90^\circ-\frac{\theta}{2}\right)}$$

である．よって

$$\mathrm{AT}=\frac{\sin\left(\frac{\theta}{2}+36^\circ\right)}{\sin\left(90^\circ-\frac{\theta}{2}\right)}\mathrm{OA}=\frac{\sin\left(\frac{\theta}{2}+36^\circ\right)}{\cos\frac{\theta}{2}}\mathrm{OA}$$

したがって

$$\mathrm{ST}=\mathrm{AT}-\mathrm{AS}=\frac{\sin\left(\frac{\theta}{2}+36^\circ\right)}{\cos\frac{\theta}{2}}\mathrm{OA}-\frac{\sin\frac{\theta}{2}}{\sin\left(126^\circ-\frac{\theta}{2}\right)}\mathrm{OA}$$

$$=\frac{\sin\left(\frac{\theta}{2}+36^\circ\right)\sin\left(126^\circ-\frac{\theta}{2}\right)-\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}}{\cos\frac{\theta}{2}\sin\left(126^\circ-\frac{\theta}{2}\right)}\mathrm{OA} \qquad \cdots\cdots①$$

ここで

(①の分子)$=-\frac{1}{2}\{\cos 162^\circ-\cos(\theta-90^\circ)\}-\frac{1}{2}\sin\theta=\frac{1}{2}\cos 18^\circ$

(①の分母) $=\frac{1}{2}\{\sin 126^\circ+\sin(126^\circ-\theta)\}$

であるから

$$\mathrm{ST}=\frac{\cos 18^\circ}{\sin 126^\circ+\sin(126^\circ-\theta)}\mathrm{OA}$$

となり， $l_\theta=10\,\mathrm{ST}$ であるから， l_θ が最小になるのは $\sin(126^\circ-\theta)$ が最大のときである．

ここで，OA は正五角形 ABCD の外接円の半径，すなわち△ ABC の外接円の半径 R に等しいから，正弦定理より

$\mathrm{OA}=R=\frac{1}{2\sin 36^\circ}$ である．

また， $0^\circ<\theta<72^\circ$ より $54^\circ<126^\circ-\theta<126^\circ$ であるから， $126^\circ-\theta=90^\circ$ すなわち $\theta=36^\circ$ のとき l_θ は最小となり，最小値は

$$\frac{10\cos 18^\circ}{\sin 126^\circ+1}\mathrm{OA}=\frac{5\sin 72^\circ}{\sin 36^\circ(\cos 36^\circ+1)}=\frac{10\cos 36^\circ}{\cos 36^\circ+1}$$

となる．

(1) より，$\cos 36^\circ=\frac{1}{2x}=\frac{1+\sqrt{5}}{4}$ であるから， l_θ の最小値は

$$\frac{10\cdot\frac{1+\sqrt{5}}{4}}{\frac{1+\sqrt{5}}{4}+1}=2\sqrt{5}$$

である．