

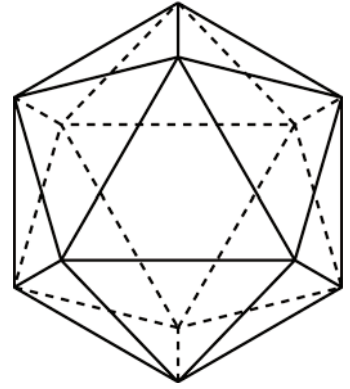
2025年度 東京科学大学 前期 数学(医歯学系)

1

(1) xy 平面と平行である I の1つの面を E_0 とする.

このとき, E_0 と辺を共有する I の面を E_1 とすると E_1 は3面あり, E_0 と頂点のみを共有する I の面を E_2 とすると, 正二十面体が各頂点に5つの面が集まるへこみのない多面体であることより, E_2 は $(5-3) \times 3 = 6$ 面ある.

よって, I がその中心 T に関して対称であることより, I の20面は, E_0, E_1, E_2 の10面, および, これらを T に関して対称移動した10面を合わせたものであるから, I は右図の実線の線分と破線の線分を合わせた図形である.

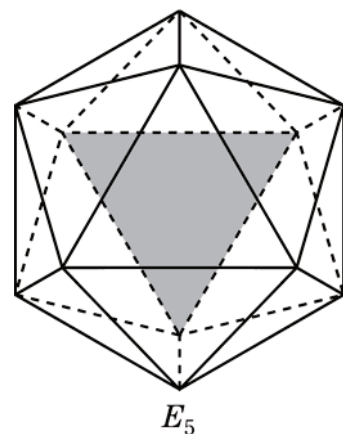
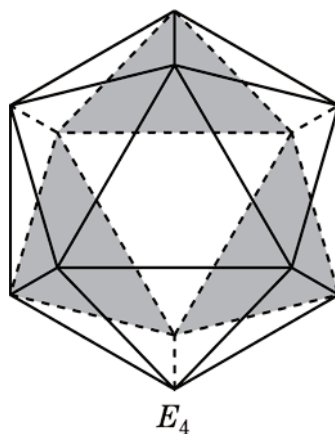
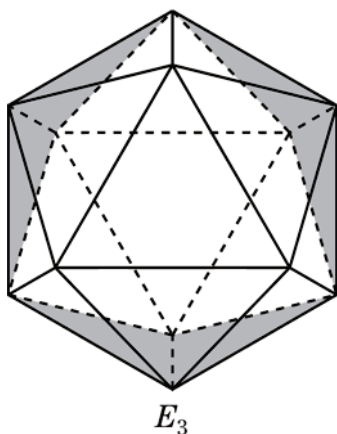
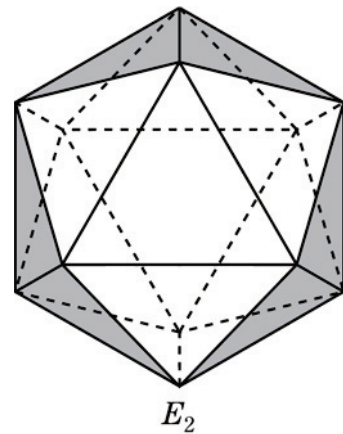
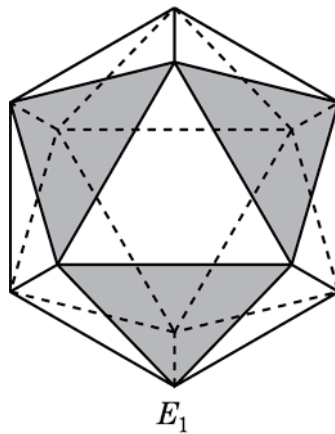
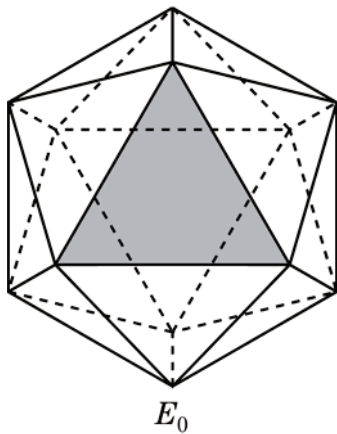


(2) $F_1 = E_0$ として一般性を失わないから, 以下では, このもとで考える.

E_0, E_1, E_2 を T に関して対称移動した I の面をそれぞれ E_5, E_4, E_3 とすると, E_5, E_4, E_3 はそれぞれ1面, 3面, 6面あり, (1)において, I の各面の xy 平面への正射影は図に実線および破線で示したようになるから,

$$d(E_0, E_k) = k \quad (k = 0, 1, 2, 3, 4, 5)$$

である.



よって, $P_k > 0$ となる k の取り得る値は $k = 0, 1, 2, 3, 4, 5$ であり,

$$P_0 = \frac{1}{20}, \quad P_1 = \frac{3}{20}, \quad P_2 = \frac{6}{20} = \frac{3}{10}, \quad P_3 = \frac{6}{20} = \frac{3}{10}, \quad P_4 = \frac{3}{20}, \quad P_5 = \frac{1}{20} \quad \cdots \cdots (\text{答})$$

である.

- (3) $n=3$ のとき, $M \geq 3$ となる事象の余事象は, $M \leq 2$ となる事象, すなわち,
 $d(F_1, F_2) \leq 2$ かつ $d(F_1, F_3) \leq 2$ かつ $d(F_2, F_3) \leq 2$
 となる事象である.

ここで,

- (a) $d(F_1, F_2)=0$ のとき (F_2 が E_0 であるとき)

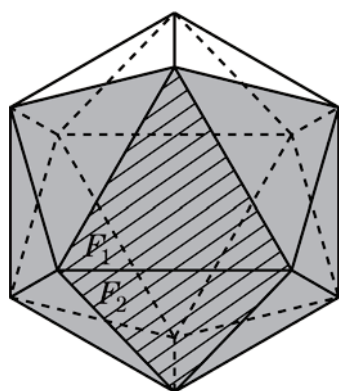
$F_2 = F_1$ であるから, $d(F_1, F_3) \leq 2$ が成り立つならば, $d(F_2, F_3) \leq 2$ も成り立ち,
 $d(F_1, F_3) \leq 2$ が成り立つような F_3 は10面ある.

- (b) $d(F_1, F_2)=1$ のとき (F_2 が E_1 であるとき)

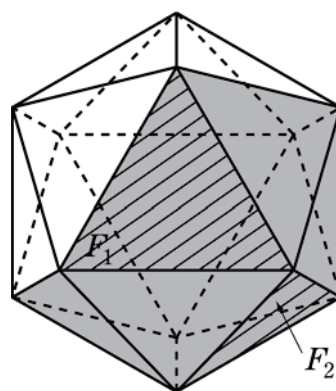
F_2 を定めると, $d(F_1, F_3) \leq 2$ かつ $d(F_2, F_3) \leq 2$ が成り立つような F_3 は8面ある
 (下図において網掛けされた面である).

- (c) $d(F_1, F_2)=2$ のとき (F_2 が E_2 であるとき)

F_2 を定めると, $d(F_1, F_3) \leq 2$ かつ $d(F_2, F_3) \leq 2$ が成り立つような F_3 は6面ある
 (下図において網掛けされた面である).



(b)



(c)

よって, 求める確率は,

$$1 - \left(P_0 \cdot \frac{10}{20} + P_1 \cdot \frac{8}{20} + P_2 \cdot \frac{6}{20} \right) = 1 - \left(\frac{1}{20} \cdot \frac{10}{20} + \frac{3}{20} \cdot \frac{8}{20} + \frac{6}{20} \cdot \frac{6}{20} \right) \\ = \frac{33}{40} \quad \dots\dots(\text{答})$$

である.

- (4) $n \geq 3$ のとき, $m \geq 3$ となるためには,

$$d(F_1, F_2) \geq 3 \text{ かつ } d(F_1, F_3) \geq 3 \text{ かつ } d(F_2, F_3) \geq 3$$

が必要である.

ここで、 $d(F_1, F_k) \geq 3$ となる条件は、 F_k が E_3, E_4, E_5 のいずれかであることである。

(i) $d(F_1, F_2) = 3$ のとき (F_2 が E_3 であるとき)

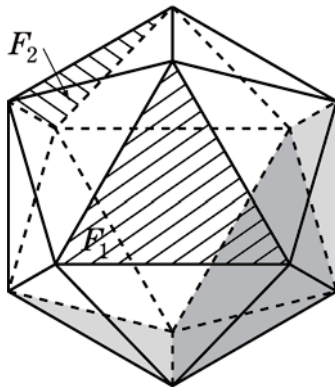
F_2 を定めると、 E_3, E_4, E_5 のいずれかでありかつ $d(F_2, F_3) \geq 3$ が成り立つような F_3 は4面ある(下図において網掛けされた面である)。

(ii) $d(F_1, F_2) = 4$ のとき (F_2 が E_4 であるとき)

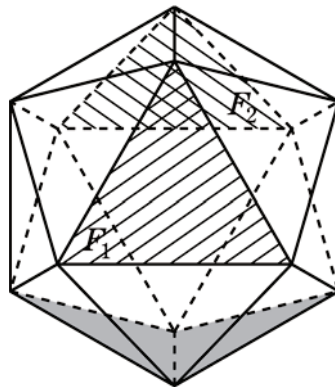
F_2 を定めると、 E_3, E_4, E_5 のいずれかでありかつ $d(F_2, F_3) \geq 3$ が成り立つような F_3 は2面ある(下図において網掛けされた面である)。

(iii) $d(F_1, F_2) = 5$ のとき (F_2 が E_5 であるとき)

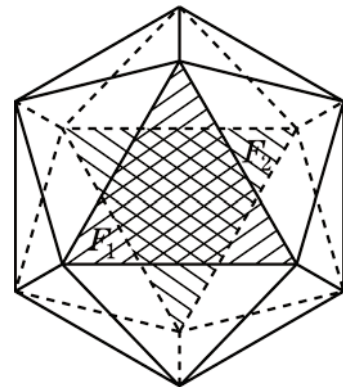
E_3, E_4, E_5 のいずれかでありかつ $d(F_2, F_3) \geq 3$ が成り立つような F_3 は存在しない。



(i)



(ii)



(iii)

(i), (ii), (iii)において、 F_3 を定めたとき、 $d(F_1, F_4) \geq 3$ かつ $d(F_2, F_4) \geq 3$ かつ $d(F_3, F_4) \geq 3$ が成り立つような F_4 が存在するのは、(i)の4面のうちの2面(上図において網掛けのうすい面)であり、このとき、 F_4 は1面のみ存在する。また、このとき、 $d(F_1, F_5) \geq 3$ かつ $d(F_2, F_5) \geq 3$ かつ $d(F_3, F_5) \geq 3$ かつ $d(F_4, F_5) \geq 3$ が成り立つような F_5 は存在しない。

よって、求める確率は、

$$n=3 \text{ のとき, } P_3 \cdot \frac{4}{20} + P_4 \cdot \frac{2}{20} = \frac{6}{20} \cdot \frac{4}{20} + \frac{3}{20} \cdot \frac{2}{20} = \frac{3}{40}$$

$$n=4 \text{ のとき, } P_3 \cdot \frac{2}{20} \cdot \frac{1}{20} = \frac{6}{20} \cdot \frac{2}{20} \cdot \frac{1}{20} = \frac{3}{2000}$$

$$n \geq 5 \text{ のとき, } 0$$

}.....(答)

である。

(5) $m \geq 1$ となる条件は、 $1 \leq i < j \leq n$ を満たすすべての i, j に対して $d(F_i, F_j) \neq 0$ となること、すなわち、 $F_1, F_2, \dots, F_n$ がすべて異なることである。

$M \leq 4$ となる条件は、 $1 \leq i < j \leq n$ を満たすすべての i, j に対して $d(F_i, F_j) \neq 5$ となること、すなわち、 $F_1, F_2, \dots, F_n$ のなかにTに関して対称な2面が含まれないことである。

よって、求める確率は、

$$n=10 \text{ のとき, } \frac{10! \cdot 2^{10}}{20^{10}} = \frac{10!}{10^{10}} = \frac{567}{1562500}$$

$$n \geq 11 \text{ のとき, } 0$$

}.....(答)

である。

2

- (1) P の座標を 2 整数 m, n で表すと,

$$\overrightarrow{OP} = m(2, 4) + n(3, 7)$$

より, $P(2m+3n, 4m+7n)$ となる. m, n が整数のとき, P の x, y 座標はともに整数であるから, 2 整数 x, y を用いて $P(x, y)$ とすると,

$$\begin{cases} 2m+3n=x \\ 4m+7n=y \end{cases}$$

が成り立つ. これを m, n について解くと,

$$\begin{cases} m = \frac{7x-3y}{2} = 3x-y + \frac{x-y}{2} \\ n = y-2x \end{cases}$$

となるから, x, y を整数として

$$P(x, y) \text{ が } L \text{ に属する} \iff x-y \text{ が } 2 \text{ で割り切れる} \iff x \text{ と } y \text{ の偶奇が一致する} \dots\dots\dots \textcircled{1}$$

となる. よって,

$$P_1(1, 1), P_3(3, 1) \text{ は } L \text{ に属し, } P_2(2, 1) \text{ は } L \text{ に属さない.} \dots\dots\dots \text{(答)}$$

- (2) x 軸上の点で L に属する P の条件は, ①より P の x 座標が偶数であることである. よって, L に属する点のうち, x 軸上にあるものは,

$$(2k, 0) \quad (k \text{ は任意の整数}) \dots\dots\dots \text{(答)}$$

である.

- (3) ①より, L の要素は, 整数 i, j, k, l を用いて $(2i, 2j)$, または $(2k+1, 2l+1)$ の形で表せる.

A', B' の x, y 座標がともに偶数のとき, $(2k+1, 2l+1)$ の形で表される L の要素 P に対して,

$$\overrightarrow{OP} = m'\overrightarrow{OA'} + n'\overrightarrow{OB'}$$

となる整数 m', n' は存在しないため, 条件を満たさず不適である. また, A', B' の少なくとも一方が O に一致するときも, 条件を満たさず不適である.

O と異なる L の要素 R に対して $|\overrightarrow{OR}|$ の値は,

$$\begin{aligned} R(2i, 2j) \text{ と表せるとき } |\overrightarrow{OR}| &= 2\sqrt{i^2+j^2} \geq 2 \\ R(2k+1, 2l+1) \text{ と表せるとき } |\overrightarrow{OR}| &= \sqrt{2(2k^2+2k+2l^2+2l+1)} \geq \sqrt{2} \end{aligned}$$

となる. よって,

$$|\overrightarrow{OA'}| + |\overrightarrow{OB'}| \geq 2\sqrt{2}$$

となる.

ここで, $|\overrightarrow{OA'}| + |\overrightarrow{OB'}| = 2\sqrt{2}$ を満たす点 A', B' として, $A'(1, 1), B'(1, -1)$ を考える. このとき,

$$\overrightarrow{OP} = m'(1, 1) + n'(1, -1) = (m' + n', m' - n')$$

であり,

$$\begin{aligned} P(2i, 2j) \text{ と表せるとき } \begin{cases} m' + n' = 2i \\ m' - n' = 2j \end{cases} &\iff \begin{cases} m' = i + j \\ n' = i - j \end{cases} \\ P(2k+1, 2l+1) \text{ と表せるとき } \begin{cases} m' + n' = 2k+1 \\ m' - n' = 2l+1 \end{cases} &\iff \begin{cases} m' = k + l + 1 \\ n' = k - l \end{cases} \end{aligned}$$

より, 任意の L の要素 P に対して $\overrightarrow{OP} = m'\overrightarrow{OA'} + n'\overrightarrow{OB'}$ を満たす整数 m', n' が存在する.

よって, $|\overrightarrow{OA'}| + |\overrightarrow{OB'}|$ の最小値は,

$$2\sqrt{2} \dots\dots\dots \text{(答)}$$

である.

(4) $P(2i, 2j)$, $Q(x, y)$ とすると,

$$\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OQ} = 2ix + 2jy = 2x \cdot i + 2y \cdot j \quad \dots\dots\dots ②$$

である. この値が任意の整数 i, j で整数となるためには, $(i, j) = (1, 0), (0, 1)$ を考えることにより, $2x, 2y$ が整数であることが必要である. 逆に, $2x, 2y$ が整数であれば, ②は確かに整数となる. 以下, $2x, 2y$ が整数であるという条件のもとで考える.

$P(2k+1, 2l+1)$, $Q(x, y)$ とすると

$$\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OQ} = (2k+1)x + (2l+1)y = 2x \cdot k + 2y \cdot l + (x+y)$$

である. この値が任意の整数 k, l で整数となるためには, $x+y$ が整数であることが必要かつ十分である.

以上より, $Q(x, y)$ が M に属する条件は,

$$2x, 2y, x+y \text{ がすべて整数であること}$$

すなわち, x', y' を整数として,

$$x = \frac{x'}{2}, y = \frac{y'}{2} \text{ と表すことができ, かつ, } x' \text{ と } y' \text{ の偶奇が一致すること}$$

である.

よって, M の要素のうち, x 座標, y 座標の絶対値がともに 1 以下であるものは,

$$(0, 0), (\pm 1, \pm 1), (\pm 1, 0), (0, \pm 1), \left(\pm \frac{1}{2}, \pm \frac{1}{2}\right) \quad (\text{複号任意}) \quad \dots\dots\dots (\text{答})$$

である.

3

(1) $f(x) = a^x$, $g(x) = \log_a x$ とおく.

C_1 上の点 $R(t, a^t)$ をとると,

$$f'(x) = a^x \log a$$

であるから, R における接線の方程式は,

$$y = a^t \log a (x - t) + a^t \quad \dots \textcircled{1}$$

と表される. 直線①が原点を通るとき,

$$0 = a^t \log a \cdot (0 - t) + a^t$$

より,

$$t = \frac{1}{\log a} = \log_a e \quad (\because a > 1 \text{ より } \log a \neq 0)$$

であり, R の y 座標は,

$$a^t = a^{\log_a e} = e$$

である. ①より, O を通る C_1 の接線の傾き k は,

$$k = a^t \log a = e \log a$$

である. したがって,

$$\log a = \frac{k}{e} \quad \text{より} \quad a = e^{\frac{k}{e}} \quad \dots \text{ (答)}$$

である. また, 接点の座標は,

$$(\log_a e, e) \quad \dots \text{ (答)}$$

である.

(2)

$$y = f(x) \Leftrightarrow x = g(y)$$

であるから,

$$2 \text{ つの曲線 } C_1, C_2 \text{ は直線 } y = x \text{ について対称} \quad \dots \text{ (※)}$$

である. よって, (1)の結果より, O を通る直線が C_2 に接するときの接点の座標は,

$$(e, \log_a e) \quad \dots \text{ (答)}$$

である.

(3) C_1 上に P , C_2 上に Q をとり, $\triangle OPQ$ が正三角形となるのは, (※) に注意すれば, 2 点 P, Q が直線 $y = x$ について対称な場合に限られる ($\Rightarrow$ (注)). このとき, 正三角形 OPQ について, 直線 $y = x$ は辺 PQ の垂直二等分線かつ $\angle POQ$ の二等分線であるから, 直線 OP は直線

$y = x$ と $\frac{\pi}{6}$ の角をなす. したがって, 直線 OP の傾きは,

$$\begin{aligned}\tan\left(\frac{\pi}{4} \pm \frac{\pi}{6}\right) &= \frac{\tan\frac{\pi}{4} \pm \tan\frac{\pi}{6}}{1 \mp \tan\frac{\pi}{4} \cdot \tan\frac{\pi}{6}} = \frac{1 \pm \frac{1}{\sqrt{3}}}{1 \mp 1 \cdot \frac{1}{\sqrt{3}}} \\ &= 2 \pm \sqrt{3} \quad (\text{複号同順})\end{aligned}$$

である.

$\triangle OPQ$ が正三角形となる P, Q の組の個数は, 2 直線 $l_1: y = (2 + \sqrt{3})x$, $l_2: y = (2 - \sqrt{3})x$ と

C_1 の共有点の個数の合計に等しい. また, C_1 は下に凸であり, $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{x} = \infty$ より x 座標が十分大きいときは C_1 はこれらの直線の上側にあることと, C_1 と y 軸との交点が $(0, 1)$ であることを合わせると, 例えば, C_1 と l_1 との共有点の個数は, (1) の結果より,

$$a > e^{\frac{2+\sqrt{3}}{e}} \quad \text{のときは } 0 \text{ 個}$$

$$a = e^{\frac{2+\sqrt{3}}{e}} \quad \text{のときは } 1 \text{ 個}$$

$$1 < a < e^{\frac{2+\sqrt{3}}{e}} \quad \text{のときは } 2 \text{ 個}$$

となる (C_1 と l_2 との共有点の個数も同様である).

したがって, 求める組の個数は,

$$\left\{ \begin{array}{ll} a > e^{\frac{2+\sqrt{3}}{e}} & \text{のとき } 0 \text{ 個} \\ a = e^{\frac{2+\sqrt{3}}{e}} & \text{のとき } 1 \text{ 個} \\ e^{\frac{2-\sqrt{3}}{e}} < a < e^{\frac{2+\sqrt{3}}{e}} & \text{のとき } 2 \text{ 個} \\ a = e^{\frac{2-\sqrt{3}}{e}} & \text{のとき } 3 \text{ 個} \\ 1 < a < e^{\frac{2-\sqrt{3}}{e}} & \text{のとき } 4 \text{ 個} \end{array} \right. \quad \dots \text{ (答)}$$

である.

(注) Pが第1象限の点であるとき、Pの x 座標が大きいほど線分OPの長さは大きくなる(Qも同様)。よって、P,Qがともに第1象限の点であるときは、 $\triangle OPQ$ が正三角形となるのは、(※)に注意すれば、2点P,Qが直線 $y=x$ について対称な場合に限られる。一方、P,Qがともに第1象限の点でないとき(すなわち、Pが第2象限、Qが第4象限の点であるとき)は、 $\angle POQ$ が鈍角となるので、 $\triangle OPQ$ が正三角形となることはない。

以下、Pが第2象限、Qが第1象限の点であり、 $OP=OQ=d$ を満たすときを考える。このとき、Qが第1象限の点であることより、 $d>1$ であることに注意して、原点を中心とし、2点P,Qを通る円 C_3 を考え、直線 $y=1$ と C_3 の(第2象限における)交点をA、直線 $x=1$ と C_3 の(第1象限における)交点をBとする。Aの座標は $(-\sqrt{d^2-1}, 1)$ 、Bの座標は $(1, \sqrt{d^2-1})$ で

あるから、 $\angle AOB = \frac{\pi}{2}$ であり、

$$\angle POQ > \angle AOB = \frac{\pi}{2}$$

となるので、 $\triangle OPQ$ は正三角形とはならない。Pが第1象限、Qが第4象限の点のときも同様である。

