2025年度 東京科学大学 前期 数学(理工学系)

$\boxed{1}$

(1) $s=1+x$ と置換して計算すると

$$\begin{aligned}
\int x\log(1+x)dx &= \int (s-1)\log s\,ds \\
&= \left(\frac{s^2}{2}-s\right)\log s-\int\left(\frac{s^2}{2}-s\right)\cdot\frac{1}{s}ds \\
&= \frac{s^2-2s}{2}\log s-\int\left(\frac{s}{2}-1\right)ds \\
&= \frac{s^2-2s}{2}\log s-\left(\frac{s^2}{4}-s\right)+C \\
&= \frac{(1+x)^2-2(1+x)}{2}\log(1+x)-\left\{\frac{(1+x)^2}{4}-(1+x)\right\}+C \\
&= \frac{x^2-1}{2}\log(1+x)-\frac{x^2}{4}+\frac{x}{2}+\frac{3}{4}+C
\end{aligned}$$

となる. ただし, C は積分定数である. $C'=C+\dfrac{3}{4}$ を改めて積分定数とすると

$$\int x\log(1+x)dx=\frac{x^2-1}{2}\log(1+x)-\frac{x^2-2x}{4}+C' \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

となる.

(2) $t=g(x)$ と置換する. このとき, $x=f(t)$ であるから

x	a $\to$ b
t	1 $\to$ 2

$$dx=\frac{dx}{dt}dt=f'(t)dt$$

である. よって

$$\begin{aligned}
I &= \int_1^2 tf'(t)dt \\
&= \Big[tf(t)\Big]_1^2-\int_1^2 1\cdot f(t)dt \\
&= 2f(2)-f(1)-\left[\frac{t^2-1}{2}\log(1+t)-\frac{t^2-2t}{4}\right]_1^2 \\
&= 2\cdot 2\log 3-\log 2-\left\{\left(\frac{3}{2}\log 3-0\right)-\left(0+\frac{1}{4}\right)\right\} \\
&= \frac{5}{2}\log 3-\log 2+\frac{1}{4} \qquad \cdots\cdots(\text{答})
\end{aligned}$$

である.

(3) $P(0)=0$ より

$$R(x)=\int_{P(0)}^{P(x)}\frac{1}{Q'(v)}dv$$

である. ここで, $v=P(u)$ と置換する.

v	$P(0)$ $\to$ $P(x)$
u	0 $\to$ x

$$dv=\frac{dv}{du}du=P'(u)du=\sqrt{1+f(u)}\,du$$

であり, $u = Q(v)$ より

$$Q'(v) = \frac{du}{dv} = \frac{1}{\dfrac{dv}{du}} = \frac{1}{P'(u)} = \frac{1}{\overline{1+f(u)}}$$

であるから

$$\begin{aligned}
R(x) &= \int_0^x \overline{1+f(u)} \cdot \overline{1+f(u)}\,du \\
&= \int_0^x \{1+f(u)\}\,du \\
&= \quad u + \frac{u^2-1}{2}\log(1+u) - \frac{u^2-2u}{4} \quad {}_0^x \\
&= \quad \frac{u^2-1}{2}\log(1+u) - \frac{u^2-6u}{4} \quad {}_0^x \\
&= \frac{x^2-1}{2}\log(1+x) - \frac{x^2-6x}{4}
\end{aligned}$$

……(答)

である.

$\boxed{2}$

(1) $l,\ m$ の方向ベクトルをそれぞれ $\overrightarrow{u}=(1,\ -1,\ 0),\ \overrightarrow{v}=(0,\ 1,\ -2)$ とおくと,

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=(0,\ 0,\ 1)+p\overrightarrow{u}\ ,\quad \overrightarrow{\mathrm{OQ}}=(1,\ 0,\ 3)+q\overrightarrow{v}$$

となる実数 $p,\ q$ が存在する．このとき

$$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}=\overrightarrow{\mathrm{OQ}}-\overrightarrow{\mathrm{OP}}=(1,\ 0,\ 2)-p\overrightarrow{u}+q\overrightarrow{v}$$

となる． $\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PQ}}=0,\ \overrightarrow{v}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PQ}}=0$ であり,

$$\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PQ}}=\overrightarrow{u}\cdot((1,\ 0,\ 2)-p\overrightarrow{u}+q\overrightarrow{v})=1-2p-q$$

$$\overrightarrow{v}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PQ}}=\overrightarrow{v}\cdot((1,\ 0,\ 2)-p\overrightarrow{u}+q\overrightarrow{v})=-4+p+5q$$

であるから, $1-2p-q=0,\ -4+p+5q=0$ である．これを解くと $p=\dfrac{1}{9},\ q=\dfrac{7}{9}$ となるから

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=(0,\ 0,\ 1)+\frac{1}{9}\overrightarrow{u} \qquad \cdots\cdots ①$$

$$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=(1,\ 0,\ 3)+\frac{7}{9}\overrightarrow{v}$$

である．これより P と Q の座標を求めると

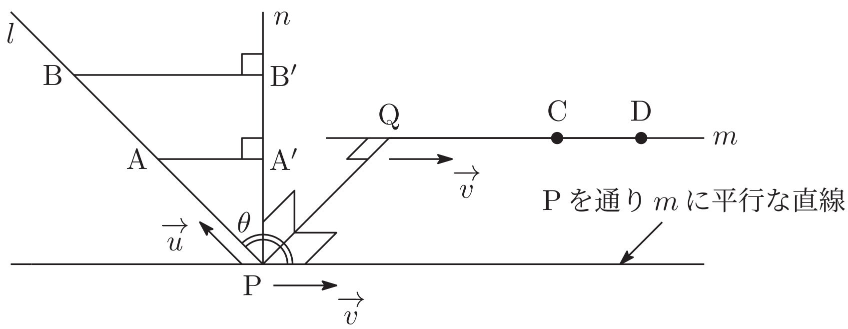
$$\mathrm{P}=\left(\frac{1}{9},\ -\frac{1}{9},\ 1\right),\quad \mathrm{Q}=\left(1,\ \frac{7}{9},\ \frac{13}{9}\right) \qquad \cdots\cdots (答)$$

となる．これにより $\overrightarrow{\mathrm{PQ}}=\left(\dfrac{8}{9},\ \dfrac{8}{9},\ \dfrac{4}{9}\right)=\dfrac{4}{9}(2,\ 2,\ 1)$ となるから

$$\mathrm{PQ}=\frac{4}{9}\sqrt{4+4+1}=\frac{4}{3} \qquad \cdots\cdots (答)$$

である．

(2)



四面体 WXYZ の体積を [WXYZ] で表す．

$\overrightarrow{u}$ と $\overrightarrow{v}$ のなす角を θ とおくと,

$$\cos\theta=\frac{\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}}{|\overrightarrow{u}||\overrightarrow{v}|}=\frac{-1}{\sqrt{10}}\ ,\quad \sin\theta=\sqrt{1-\cos^2\theta}=\frac{3}{\sqrt{10}}$$

である． $t\geqq 0$ のとき $V(t)$ を求める．次のいずれかが成立する．

(ア) A は線分 PB 上にある　　(イ) P は線分 AB 上にある　　(ウ) B は線分 PA 上にある

今, ①と

$$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=(0,\ 0,\ 1)+t\overrightarrow{u}\ ,\quad \overrightarrow{\mathrm{OB}}=(0,\ 0,\ 1)+(t+2+\sin t)\overrightarrow{u}$$

が成立していて, $\dfrac{1}{9}\leqq t+2+\sin t,\ t\leqq t+2+\sin t$ であるから, (ウ) は起こらない．

(ア) のときを考えよう． $\triangle\mathrm{CDP}$ の面積を S とおく．P を通り PQ にも $\overrightarrow{v}$ にも垂直な直線を n とおき, A, B から n に引いた垂線と n との交点をそれぞれ A′, B′ とおく．このとき

$$V(t)=[\mathrm{CDPB}]-[\mathrm{CDPA}]=\frac{1}{3}\cdot S\cdot \mathrm{PB}'-\frac{1}{3}\cdot S\cdot \mathrm{PA}'=\frac{1}{3}S(\mathrm{PB}'-\mathrm{PA}')=\frac{1}{3}S\cdot \mathrm{A'B'}$$

より

$$V(t)=\frac{1}{3}S\cdot \mathrm{A'B'} \qquad \cdots\cdots ②$$

となる．

(イ) のときは，$V(t)=[\mathrm{CDPB}]+[\mathrm{CDPA}]$ であり，(ア) と同様に考えると ②と同じ式が得られる．

結局，(ア)，(イ) のいずれの場合も ②が成立し，(ア)，(イ) のいずれの場合も $\mathrm{A'B'}$ は $\mathrm{AB}\sin\theta$ に等しいから

$$\begin{aligned}V(t)&=\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{1}{2}\cdot \mathrm{CD}\cdot \mathrm{PQ}\right)\cdot \mathrm{AB}\sin\theta\\&=\frac{1}{6}\cdot \mathrm{PQ}\cdot\mathrm{AB}\cdot\mathrm{CD}\cdot\sin\theta\\&=\frac{1}{6}\cdot\frac{4}{3}\cdot\left|(2+\sin t)\overrightarrow{u}\right|\cdot\left|(2+\cos t)\overrightarrow{v}\right|\cdot\sin\theta\\&=\frac{1}{6}\cdot\frac{4}{3}\cdot(2+\sin t)\sqrt{2}\cdot(2+\cos t)\sqrt{5}\cdot\frac{3}{\sqrt{10}}=\frac{2}{3}(2+\sin t)(2+\cos t) \qquad \cdots\cdots ③\end{aligned}$$

である．よって

$$V(0)=4 \qquad \cdots\cdots (答)$$

である．

(3) $s=\sin t+\cos t$ とおく．$s=\sqrt{2}\sin\left(t+\dfrac{\pi}{4}\right)$ より，$t\geqq 0$ のとき s は $-\sqrt{2}\leqq s\leqq\sqrt{2}$ の範囲を動く．$s^2=\sin^2 t+\cos^2 t+2\sin t\cos t=1+2\sin t\cos t$ より

$$\sin t\cos t=\frac{s^2}{2}-\frac{1}{2}$$

である．よって，③より

$$V(t)=\frac{2}{3}(4+2(\sin t+\cos t)+\sin t\cos t)=\frac{2}{3}\left(4+2s+\left(\frac{s^2}{2}-\frac{1}{2}\right)\right)=\frac{1}{3}(s+2)^2+1$$

となるから，$V(t)$ は $s=\sqrt{2}$ で最大値

$$3+\frac{4\sqrt{2}}{3} \qquad \cdots\cdots (答)$$

をとり，$s=-\sqrt{2}$ で最小値

$$3-\frac{4\sqrt{2}}{3} \qquad \cdots\cdots (答)$$

をとる．

$\boxed{3}$

(1)　ある回で表が出ることを○，裏が出ることを×で表す．ゲームが終わったときに 1 点となっているような表裏の出方は

○××　または　×○××

であるから

$$Q_1 = p(1-p)^2 + p(1-p)^3 = p(1-p)^2(2-p) \qquad \cdots\cdots（答）$$

である．また，ゲームが終わったときに 2 点となっているような表裏の出方は

○○××　または　×○○××　または　○×○××　または　×○×○××

であるから

$$\begin{aligned} Q_2 &= p^2(1-p)^2 + 2p^2(1-p)^3 + p^2(1-p)^4 \\ &= p^2(1-p)^2\left\{1 + 2(1-p) + (1-p)^2\right\} \\ &= p^2(1-p)^2\left\{1 + (1-p)\right\}^2 \\ &= p^2(1-p)^2(2-p)^2 \qquad \cdots\cdots（答） \end{aligned}$$

である．

(2)　ゲームが終わったときに $n+1$ 点となっているのは

(i)　最初が○で，その後さらに n 点を加算して終了する．

(ii)　最初の 2 回が×○で，その後さらに n 点を加算して終了する．

の 2 つの場合のいずれかである．したがって，確率 Q_n について

$$Q_{n+1} = pQ_n + (1-p)pQ_n = p(2-p)Q_n \qquad \cdots\cdots①$$

が成り立つ．また，ゲームが終わったときに 0 点となっているのは，××の場合のみであるから

$$Q_0 = (1-p)^2$$

である．よって，①より，0 以上の整数 n に対して定義される数列 $\{Q_n\}$ は，初項 Q_0，公比 $p(2-p)$ の等比数列であるから

$$Q_n = (1-p)^2\{p(2-p)\}^n = (1-p)^2\left(2p-p^2\right)^n \qquad \cdots\cdots（答）$$

である．

（別解 1）

$n \geqq 2$ とする．ゲームが終わったときに n 点となっているような表裏の出方は

$$\underbrace{△○△○△○\cdots△○△○}_{「△○」がn個並ぶ}××$$

となる．ただし，△には×が 0 個または 1 個入る．

×が全部で k 個（k は $0 \leqq k \leqq n$ を満たす整数）入るとすると，その入り方は ${}_n\mathrm{C}_k$ 通りあり，そのいずれも確率は $p^n(1-p)^k \cdot (1-p)^2$ と表される．よって，n 点目が入るまでに裏が k 回出て，n 点のままゲームが終わる確率は

$${}_n\mathrm{C}_k p^n (1-p)^k \cdot (1-p)^2$$

と表される．したがって

$$\begin{aligned} Q_n &= \sum_{k=0}^{n} {}_n\mathrm{C}_k p^n (1-p)^k \cdot (1-p)^2 \\ &= p^n (1-p)^2 \sum_{k=0}^{n} {}_n\mathrm{C}_k (1-p)^k \\ &= p^n (1-p)^2 \{1+(1-p)\}^n \quad (\because \text{ 二項定理を用いた}) \\ &= p^n (1-p)^2 (2-p)^n \\ &= (1-p)^2 \left(2p-p^2\right)^n \end{aligned}$$

と表される．(1)の結果と，$Q_0 = (1-p)^2$ であることより，$n = 0, 1$ のときもこれでよい．

以上より，0 以上の整数 n に対し

$$Q_n = (1-p)^2 \left(2p-p^2\right)^n \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

である．

（別解 2）

n を 0 以上の整数とする．求める確率は，「○」または「×○」を全部で n 個並べ，その後××を並べる確率と考えることができる．よって

$$Q_n = \{p+(1-p)p\}^n (1-p)^2 = (1-p)^2 \left(2p-p^2\right)^n \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

である．

(3)　$0 < x < 1$ に注意する．N を正の整数として

$$S_N = \sum_{n=0}^{N} (n+1)x^n = 1\cdot x^0 + 2\cdot x^1 + 3\cdot x^2 + \cdots + (N+1)x^N \qquad \cdots\cdots②$$

とおくと

$$xS_N = \qquad 1\cdot x^1 + 2\cdot x^2 + \cdots + N\cdot x^N + (N+1)x^{N+1} \qquad \cdots\cdots③$$

である．したがって，②，③の辺々を引くと

$$\begin{aligned} (1-x)S_N &= 1\cdot x^0 + 1\cdot x^1 + 1\cdot x^2 + \cdots + 1\cdot x^N - (N+1)x^{N+1} \\ &= \frac{1-x^{N+1}}{1-x} - (N+1)x^{N+1} \end{aligned}$$

であるから

$$S_N = \frac{1-x^{N+1}}{(1-x)^2} - \frac{(N+1)x^{N+1}}{1-x}$$

と表される．$0 < x < 1$ のとき $\displaystyle\lim_{N\to\infty} x^{N+1} = 0$ であり，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} nx^n = 0$ より $\displaystyle\lim_{N\to\infty} (N+1)x^{N+1} = 0$ である

から

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)x^n=\lim_{N\to\infty}S_N=\frac{1}{(1-x)^2}$$

より

$$\frac{1}{(1-x)^2}=\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)x^n \qquad \cdots\cdots④$$

が成り立つ. （証明終）

(4)　(2)の結果より

$$nQ_n=n(1-p)^2\left(2p-p^2\right)^n$$

であり

$$2p-p^2=-(p-1)^2+1$$

と $0<p<1$ より

$$-(-1)^2+1=0<-(p-1)^2+1<1 \quad すなわち \quad 0<2p-p^2<1$$

であるから

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty}nQ_n &= \sum_{n=1}^{\infty}nQ_n \quad (\because n=0 \text{ のとき } nQ_n=0)\\
&=(1-p)^2\sum_{n=1}^{\infty}n\left(2p-p^2\right)^n\\
&=(1-p)^2\sum_{m=0}^{\infty}(m+1)\left(2p-p^2\right)^{m+1} \quad (m=n-1 \text{ とした})\\
&=(1-p)^2\left(2p-p^2\right)\sum_{m=0}^{\infty}(m+1)\left(2p-p^2\right)^m\\
&=(1-p)^2\left(2p-p^2\right)\cdot\frac{1}{\left\{1-\left(2p-p^2\right)\right\}^2} \quad (④\text{を用いた})\\
&=\frac{p(1-p)^2(2-p)}{(1-p)^4}\\
&=\frac{p(2-p)}{(1-p)^2} \qquad \cdots\cdots(\text{答})
\end{aligned}$$

である.

4

$a_1 = a_2 = 1$ ……①

$a_{n+2} = a_{n+1} + a_n \quad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$ ……②

$\tan b_n = \dfrac{1}{a_n}$ ……③

$0 < b_n < \dfrac{\pi}{2}$ ……④

(1) $n \geqq 2$ のとき，$c_n = a_{n+1}a_{n-1} - {a_n}^2$ とおく．②より

$$c_{n+1} = a_{n+2}a_n - {a_{n+1}}^2 = (a_{n+1} + a_n)a_n - {a_{n+1}}^2 = {a_n}^2 - a_{n+1}(a_{n+1} - a_n)$$

ここで，②より $a_{n+1} = a_n + a_{n-1}$ すなわち $a_{n+1} - a_n = a_{n-1}$ が成り立つから

$$c_{n+1} = {a_n}^2 - a_{n+1}a_{n-1} = -c_n$$

となる．これより，$\{c_n\}$ は公比 -1 の等比数列であるから

$$c_n = c_2 \cdot (-1)^{n-2}$$

である．

①，②より $a_3 = a_2 + a_1 = 1 + 1 = 2$ であるから

$$c_2 = a_3a_1 - {a_2}^2 = 2 \cdot 1 - 1^2 = 1$$

となるので

$$c_n = 1 \cdot (-1)^{n-2} = (-1)^n$$

すなわち

$$a_{n+1}a_{n-1} - {a_n}^2 = (-1)^n \quad (n \geqq 2)$$ ……⑤（答）

である．

(2) ③より

$$a_{2m} \cdot \tan(b_{2m+1} + b_{2m+2}) = a_{2m} \cdot \frac{\tan b_{2m+1} + \tan b_{2m+2}}{1 - \tan b_{2m+1} \tan b_{2m+2}} = a_{2m} \cdot \frac{\dfrac{1}{a_{2m+1}} + \dfrac{1}{a_{2m+2}}}{1 - \dfrac{1}{a_{2m+1}} \cdot \dfrac{1}{a_{2m+2}}}$$

$$= \frac{a_{2m}(a_{2m+2} + a_{2m+1})}{a_{2m+1}a_{2m+2} - 1} = \frac{a_{2m}a_{2m+2} + a_{2m}a_{2m+1}}{a_{2m+1}a_{2m+2} - 1}$$ ……⑥

ここで，⑤で $n = 2m + 1\ (\geqq 2 \cdot 1 + 1 \geqq 2)$ とすると

$$a_{2m+2}a_{2m} - {a_{2m+1}}^2 = -1 \qquad \text{すなわち} \qquad a_{2m}a_{2m+2} = {a_{2m+1}}^2 - 1$$

となる．

これを⑥に用いて，さらに，②より $a_{2m+1} + a_{2m} = a_{2m+2}$ であることから

$$a_{2m} \cdot \tan(b_{2m+1} + b_{2m+2}) = \frac{{a_{2m+1}}^2 - 1 + a_{2m}a_{2m+1}}{a_{2m+1}a_{2m+2} - 1} = \frac{a_{2m+1}(a_{2m+1} + a_{2m}) - 1}{a_{2m+1}a_{2m+2} - 1}$$

$$= \frac{a_{2m+1}a_{2m+2} - 1}{a_{2m+1}a_{2m+2} - 1} = 1$$ ……⑦（答）

である．

(3)　①，②で定まる $\{a_n\}$ の各項は正であるから，$a_{2m}>0$ である．
　すると，⑦，および，③より

$$\tan(b_{2m+1}+b_{2m+2})=\frac{1}{a_{2m}}=\tan b_{2m}$$

が成り立ち，④より $0<b_{2m+1}+b_{2m+2}<\pi$，$0<b_{2m}<\dfrac{\pi}{2}$ であるから

$$b_{2m+1}+b_{2m+2}=b_{2m} \qquad \text{すなわち} \qquad b_{2m+1}=b_{2m}-b_{2m+2}$$

　すると，正の整数 N に対し

$$\begin{aligned}\sum_{m=0}^{N} b_{2m+1}&=b_1+\sum_{m=1}^{N} b_{2m+1}=b_1+\sum_{m=1}^{N}(b_{2m}-b_{2m+2})\\&=b_1+(b_2-b_4)+(b_4-b_6)+\cdots+(b_{2N}-b_{2N+2})\\&=b_1+b_2-b_{2N+2} \qquad \cdots\cdots ⑧\end{aligned}$$

となる．
　ここで，$n\geqq 5$ のとき

$$a_n \geqq n \qquad \cdots\cdots ⑨$$

が成り立つことを数学的帰納法により証明する．
（Ⅰ）$n=5,\ 6$ のとき
　①，②より $a_3=2,\ a_4=3,\ a_5=5,\ a_6=8$ であり，$a_5\geqq 5,\ a_6\geqq 6$ であるから，$n=5,\ 6$ のとき⑨は成り立つ．
（Ⅱ）$n=k,\ k+1\ (k\geqq 5)$ のとき，⑨が成り立つと仮定する．すなわち

$$a_k\geqq k,\ a_{k+1}\geqq k+1$$

が成り立つと仮定すると

$$a_{k+2}=a_{k+1}+a_k\geqq (k+1)+k\geqq (k+1)+1=k+2$$

となり，$n=k+2$ のときも⑨が成り立つ．
　よって（Ⅰ），（Ⅱ）より，$n\geqq 5$ のとき⑨が成り立つ．
　これより $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=\infty$ であるから，③より

$$\lim_{n\to\infty}\tan b_n=0$$

であり，すると④より

$$\lim_{n\to\infty} b_n=0 \qquad \cdots\cdots ⑩$$

である．
　また，①，③より $\tan b_1=\tan b_2=1$ であり，すると④より $b_1=b_2=\dfrac{\pi}{4}$ である．
　これと，⑧，⑩より

$$\sum_{m=0}^{\infty} b_{2m+1}=\lim_{N\to\infty}\sum_{m=0}^{N} b_{2m+1}=\lim_{N\to\infty}(b_1+b_2-b_{2N+2})=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{4}-0=\frac{\pi}{2} \qquad \cdots\cdots（答）$$

である．

$\boxed{5}$

(1) $f(t)=\dfrac{t^2-1}{t^3}$ は奇関数であるから，グラフは原点に関して対称である．

$$f'(t)=\frac{2t\cdot t^3-(t^2-1)\cdot 3t^2}{t^6}=\frac{-t^2+3}{t^4}$$

であるから，$t>0$ における増減は下表のようになる．

t	(0)	$\cdots$	$\sqrt{3}$	$\cdots$
$f'(t)$		$+$	0	$-$
$f(t)$		$\nearrow$	$\dfrac{2}{3\sqrt{3}}$	$\searrow$

さらに

$$\lim_{t\to+0}f(t)=-\infty,\quad \lim_{t\to\infty}f(t)=0$$

である．

対称性も考えると，$u=f(t)$ のグラフは下のようになる．

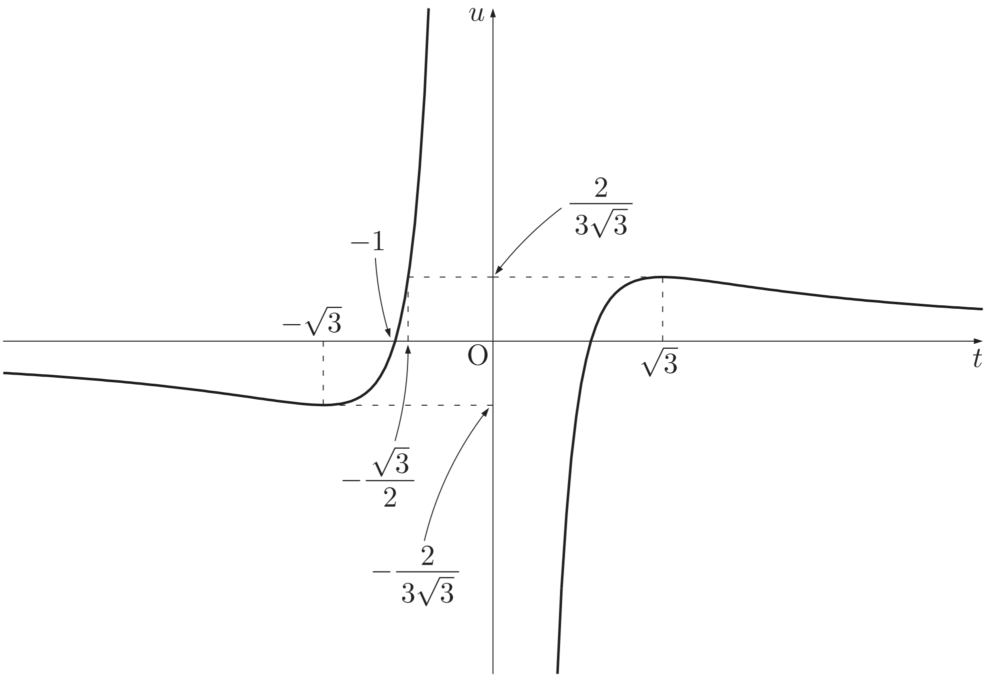
なお，(2) で必要になるので次のことも調べ，図に書き込んだ．

$f(t)=\dfrac{2}{3\sqrt{3}}$ を解くと

$$\frac{t^2-1}{t^3}=\frac{2}{3\sqrt{3}}\qquad \therefore\ 2t^3-3\sqrt{3}t^2+3\sqrt{3}=0$$

$$\therefore\ (t-\sqrt{3})^2(2t+\sqrt{3})=0\qquad \therefore\ t=\sqrt{3},\ -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

である．



(2) $x < y < z$ ……①

$xyz \neq 0$ ……②

$x^3y^2 - x^3 = x^2y^3 - y^3$ ……③

$y^3z^2 - y^3 = y^2z^3 - z^3$ ……④

②のもとで，③は

$$x^3(y^2-1) = y^3(x^2-1)$$

$$\therefore\ \frac{x^2-1}{x^3} = \frac{y^2-1}{y^3}$$

$$\therefore\ f(x) = f(y)$$

と変形できる．

同様に，②のもとで，④は $f(y) = f(z)$ に変形できる．

ゆえに，与えられた条件 (①かつ②かつ③かつ④) は

$$\begin{cases} x < y < z & \cdots\cdots ① \\ xyz \neq 0 & \cdots\cdots ② \\ f(x) = f(y) = f(z) & \cdots\cdots ⑤ \end{cases}$$

と同値である．

②より，(1) のグラフ $\left(tu \text{ 平面上の曲線 } u = f(t)\right)$ 上に点 $\mathrm{A}(x,\ f(x))$，$\mathrm{B}(y,\ f(y))$，$\mathrm{C}(z,\ f(z))$ をとることができる．

①は

(A の t 座標) $<$ (B の t 座標) $<$ (C の t 座標) ……⑥

ということを表している．

⑤は

A，B，C は一直線上にあって，その直線は t 軸に平行である ……⑦

ということを表している．

ゆえに，実数 x，y，z が「①かつ②かつ⑤」を満たしながら動くということは

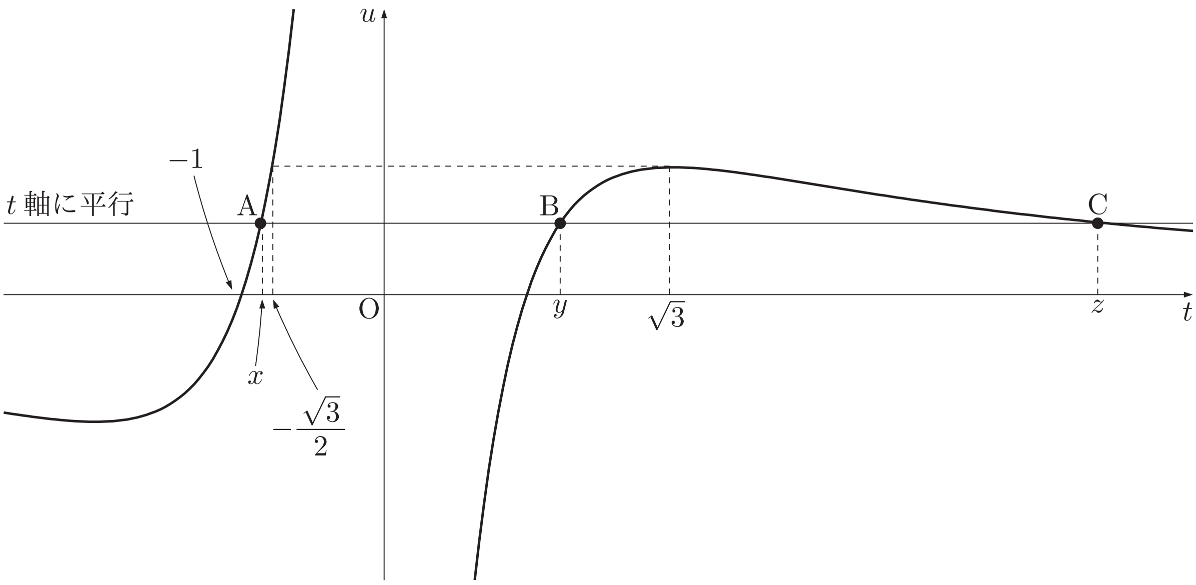
tu 平面上で曲線 $u = f(t)$ 上の点 A，B，C が⑥と⑦を満たしながら動く

ということでもある．そのときの x $\left(= (\text{点 A の } t \text{ 座標})\right)$ の動く範囲が，求めるものである．

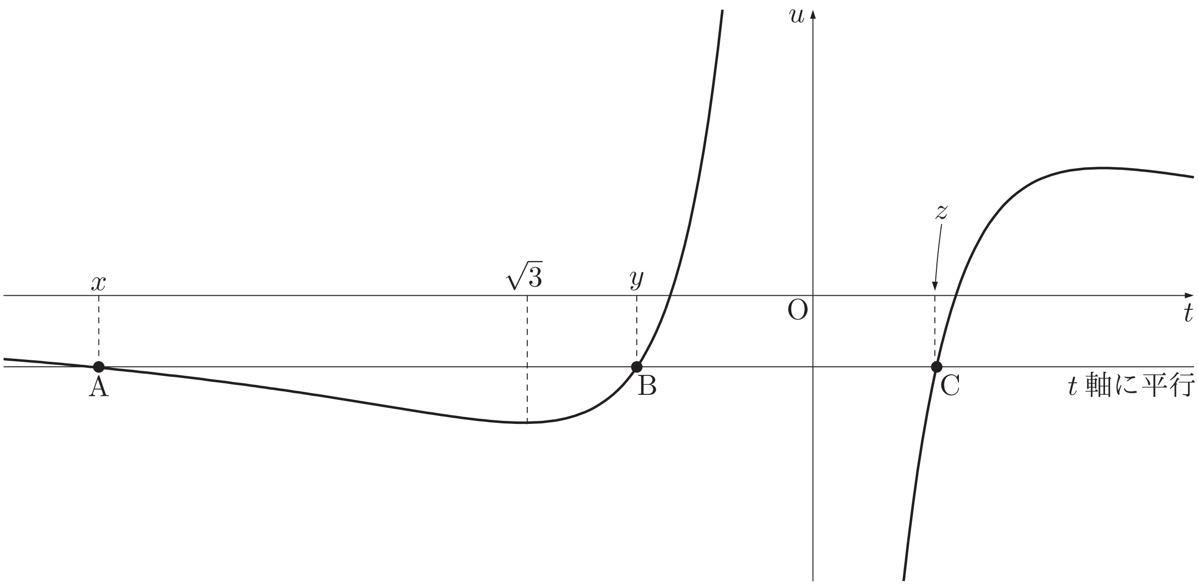
ゆえに，(1) の図から，求める範囲は

$x < -\sqrt{3}$ または $-1 < x < -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ …… (答)

である．



u
-1
t 軸に平行
A
B
C
O
x
$-\frac{\sqrt{3}}{2}$
y
$\sqrt{3}$
z
t



u
z
x
$\sqrt{3}$
y
O
t
A
B
C
t 軸に平行