2025年度 東京大学 前期 数学 文系

文科　第1問

$$C: y=x^2 \cdots\cdots①$$

(1)　①より，$y'=2x$

よって，点 $\mathrm{P}(a\,,\,a^2)$ における法線 l の方程式は，$a>0$ に注意して

$$y-a^2=-\frac{1}{2a}(x-a)$$

$$y=-\frac{1}{2a}x+\frac{1}{2}+a^2 \cdots\cdots②$$

①，②より

$$x^2=-\frac{1}{2a}x+\frac{1}{2}+a^2$$

$$x^2+\frac{1}{2a}x-\left(\frac{1}{2}+a^2\right)=0$$

$$(x-a)\left\{x+\left(\frac{1}{2a}+a\right)\right\}=0$$

よって

$$x=a\,,\,-\left(\frac{1}{2a}+a\right)$$

$a>0$ より $a\neq-\left(\dfrac{1}{2a}+a\right)$であるから，点 Q の x 座標は

$$-\left(\frac{1}{2a}+a\right)=-\frac{2a^2+1}{2a}$$

である．

(2)　$a>0$ より

$$\frac{2a^2+1}{2a}=a+\frac{1}{2a}\geqq 2\sqrt{a\cdot\frac{1}{2a}}=\sqrt{2}$$

であり，等号は，$a=\dfrac{1}{2a}$ つまり $a=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ のとき成り立つ．また，a が大きくなると，$a+\dfrac{1}{2a}$ はいくらでも大きくなるから，$t=\dfrac{2a^2+1}{2a}$ とおくと，t の取りうる値の範囲は $t\geqq\sqrt{2}$ ……③　である．

(1) と同様に，点 R の x 座標は

$$-\frac{2(-t)^2+1}{2(-t)}=\frac{2t^2+1}{2t}$$

である．

$\dfrac{2t^2+1}{2t}=k$ ……④　とおいて，③，④を満たす実数 t が存在するための条件を求める．

$$④ \iff 2t^2+1=2kt \iff 2t^2-2kt+1=0$$

$f(t)=2t^2-2kt+1$ とおくと

$$f(t)=2\left(t-\frac{k}{2}\right)^2-\frac{k^2}{2}+1$$

よって，ts 平面において放物線 $s=f(t)$ の軸は $t=\dfrac{k}{2}$ であり，$f(0)=1>0$ を考えると

（ｉ）$\dfrac{k}{2} \geqq \sqrt{2}$ つまり $k \geqq 2\sqrt{2}$ のとき，$f\left(\dfrac{k}{2}\right) = -\dfrac{k^2}{2} + 1 < 0$ となるから，適する．

（ii）$\dfrac{k}{2} < \sqrt{2}$ つまり $k < 2\sqrt{2}$ のとき

$$f(\sqrt{2}) = 2(\sqrt{2})^2 - 2k \cdot \sqrt{2} + 1 \leqq 0$$

よって

$$k \geqq \frac{5\sqrt{2}}{4}$$

（ｉ），（ii）まとめて，③，④を満たす実数 t が存在するための条件は

$$k \geqq \frac{5\sqrt{2}}{4}$$

である．

したがって，点 R の x 座標の最小値は

$$\frac{5\sqrt{2}}{4}$$

である．

（別解）③までは同じ

(1) と同様に，点 R の x 座標は

$$-\frac{2(-t)^2+1}{2(-t)} = \frac{2t^2+1}{2t} = \frac{3}{4}t + \frac{t}{4} + \frac{1}{2t} \geqq \frac{3}{4}\sqrt{2} + 2\sqrt{\frac{t}{4} \cdot \frac{1}{2t}} = \frac{5}{2\sqrt{2}}$$

等号は $t = \sqrt{2}$ かつ $\dfrac{t}{4} = \dfrac{1}{2t}$ のとき，すなわち $t = \sqrt{2}$ のとき成り立つ．

したがって，点 R の x 座標の最小値は

$$\frac{5\sqrt{2}}{4}$$

である．

文科　第2問

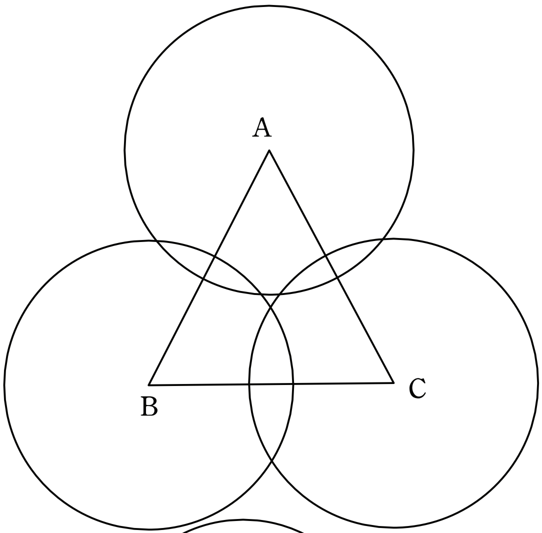
⑶　辺BCの中点をMとすると

$$\mathrm{AM}=\cos\frac{\theta}{2}\ ,\ \mathrm{BM}=\mathrm{CM}=\sin\frac{\theta}{2}$$

（ｉ）辺AB,AC,BCがすべてD_rに含まれるための条件を考える．

（ア）$0<\theta\leqq\dfrac{\pi}{2}$ のとき，AM≧BM であるから

$$r\geqq\max\left\{\frac{1}{2}\,,\frac{1}{2}\mathrm{BC}\right\}=\max\left\{\frac{1}{2}\,,\sin\frac{\theta}{2}\right\}$$

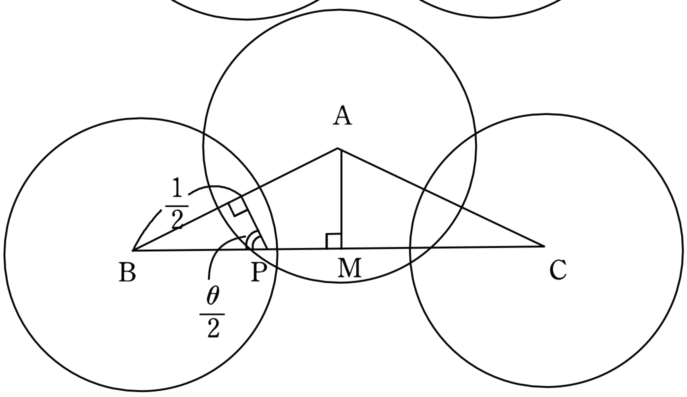


よって

$0<\theta\leqq\dfrac{\pi}{3}$ のとき，$s=\dfrac{1}{2}$

$\dfrac{\pi}{3}<\theta\leqq\dfrac{\pi}{2}$ のとき，$s=\sin\dfrac{\theta}{2}$

（イ）$\dfrac{\pi}{2}<\theta<\pi$ のとき．辺ABの垂直二等分線と辺BCとの交点をPとすると，Pは線分BM上にあり



$$\mathrm{BP}=\frac{\frac{1}{2}}{\sin\frac{\theta}{2}}=\frac{1}{2\sin\frac{\theta}{2}}$$

よって

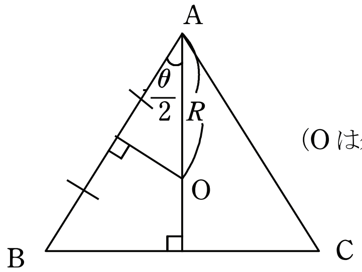
$$s=\mathrm{BP}=\frac{1}{2\sin\frac{\theta}{2}}$$

（ii）△ABCがD_rに含まれるための条件を考える．△ABCの外接円の半径をRとする．

（ウ）△ABCの外心が△ABCの周および内部にあるとき，

すなわち$0<\theta\leqq\dfrac{\pi}{2}$ のとき

$$r\geqq R$$



（Oは外心）

よって

$$t=R=\frac{\frac{1}{2}}{\cos\frac{\theta}{2}}=\frac{1}{2\cos\frac{\theta}{2}}$$

（エ）△ABCの外心が△ABCの外部にあるとき，すなわち$\dfrac{\pi}{2}<\theta<\pi$ のとき，（イ）と同様に

$$t=\mathrm{BP}=\frac{1}{2\sin\frac{\theta}{2}}$$

⑴　$\angle\mathrm{BAC}=\dfrac{\pi}{3}$ のとき，（ア），（ウ）より

$$s=\frac{1}{2}\,,t=\frac{1}{\sqrt{3}}$$

⑵　$\angle \mathrm{BAC}=\dfrac{2\pi}{3}$ のとき，（イ），（エ）より

$$s=t=\frac{1}{2\sin\dfrac{\pi}{3}}=\frac{1}{\sqrt{3}}$$

文科　第３問

白玉を○，黒玉を●と表す．

手順（＊）を n 回行った後に右端の 2 個の玉が「○○」,「○●」,「●○」,「●●」である確率を順に，a_n，b_n，c_n，d_n とおくと

$$a_n + b_n + c_n + d_n = 1 \qquad \cdots\cdots①$$

が成り立つ．

はじめ玉の並びは○○であり，手順（＊）を 1 回行った後では「○○○」か「○○●」であるから

$$a_1 = \frac{1}{2},\ b_1 = \frac{1}{2},\ c_1 = 0,\ d_1 = 0$$

である．

また，手順（＊）を n 回行った後と，$n+1$ 回行った後の右端の 2 個の玉の変化の推移は，次のようになる。

n 回後		$n+1$ 回後			
○○	→	○○	または	○●	（確率はいずれも $\frac{1}{2}$ ずつである）
○●	→	○○	または	●●	（確率はいずれも $\frac{1}{2}$ ずつである）
●○	→	○○	または	●●	（確率はいずれも $\frac{1}{2}$ ずつである）
●●	→	●○	または	●●	（確率はいずれも $\frac{1}{2}$ ずつである）

したがって

$$\begin{cases} a_{n+1} = \frac{1}{2}a_n + \frac{1}{2}b_n + \frac{1}{2}c_n & \cdots\cdots② \\ b_{n+1} = \frac{1}{2}a_n & \cdots\cdots③ \\ c_{n+1} = \frac{1}{2}d_n & \cdots\cdots④ \\ d_{n+1} = \frac{1}{2}b_n + \frac{1}{2}c_n + \frac{1}{2}d_n & \cdots\cdots⑤ \end{cases}$$

が成り立つ．

②−⑤より

$$a_{n+1} - d_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n - d_n)$$

となり，これより

$$a_n - d_n = (a_1 - d_1)\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \left(\frac{1}{2}\right)^n \qquad \cdots\cdots⑥$$

②＋⑤より

$$a_{n+1} + d_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n + d_n) + (b_n + c_n)$$

となり，①より $b_n + c_n = 1 - (a_n + d_n)$ であるから

$$a_{n+1} + d_{n+1} = -\frac{1}{2}(a_n + d_n) + 1$$

$$a_{n+1} + d_{n+1} - \frac{2}{3} = -\frac{1}{2}\left(a_n + d_n - \frac{2}{3}\right)$$

と変形できる．これより

$$a_n + d_n = \frac{2}{3} + \left(a_1 + d_1 - \frac{2}{3}\right)\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \frac{2}{3} + \frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^n \qquad \cdots\cdots⑦$$

となる．

(3)　$\dfrac{⑥+⑦}{2}$ より

$$a_n = \frac{1}{3} + \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} - \frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1}$$

となり，これが右から 1 番目と 2 番目がともに白玉である確率である．

(2)　$n \geqq 2$ のとき，③より

$$b_n = \frac{1}{2}a_{n-1} = \frac{1}{6} + \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} + \frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1}$$

であり，これは $n = 1$ のときも正しい．

よって，右から 2 番目の玉が白玉である確率は

$$a_n + b_n = \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^n \qquad \cdots\cdots⑧$$

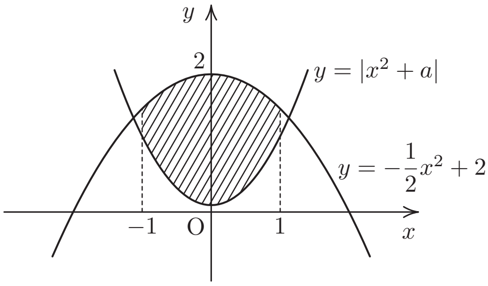
である．

(1)　$n = 3$ のとき右から 2 番目の玉が白玉である確率は，⑧で $n = 3$ として

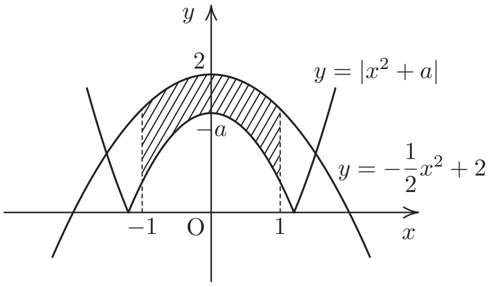
$$\frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{5}{8}$$

である．

文科　第 4 問



$a \geqq 0$ のときは，$|x^2+a| = x^2+a$ であり，$0 \geqq a < 2$ のとき，$S(a)$ は $-1 \leqq x \leqq 1$ の範囲で，不等式 $x^2+a \leqq y \leqq -\frac{1}{2}x^2+2$ で表される領域の面積となる．a が $0 \leqq a < 2$ の範囲を動くとき，a が増加すると $y=x^2+a$ のグラフは上に上がっていくので，$S(a)$ は単調減少となる．よって，この範囲では $a=0$ のとき $S(a)$ は最大となる．

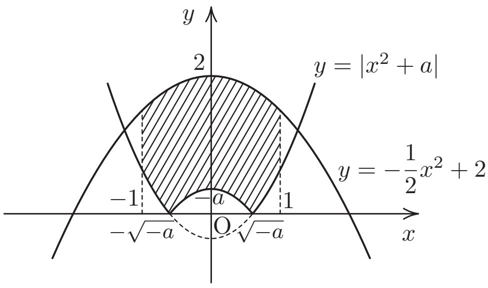


また，$-1 \leqq x \leqq 1$ の範囲において，$x^2 \leqq 1$ となるので，$-2 \leqq a \leqq -1$ のとき，$x^2+a \leqq 1+a \leqq 0$ となる．よって，このとき $-1 \leqq x \leqq 1$ において，$|x^2+a| = -x^2-a$ となるので，$S(a)$ は $-1 \leqq x \leqq 1$ の範囲で，不等式 $-x^2-a \leqq y \leqq -\frac{1}{2}x^2+2$ で表される領域の面積となる．ここで，

$$\left(-\frac{1}{2}x^2+2\right)-(-x^2-a) = \frac{1}{2}x^2+2+a \geqq 2+a \geqq 0 \qquad (a \geqq -2 \text{ より})$$

であるので，$y=-\frac{1}{2}x^2+2$ のグラフは常に $y=-x^2-a$ のグラフの上方にある．このことに注意した上で，a が $-2 \leqq a \leqq -1$ の範囲を動くとき，a が増加すると $y=-x^2-a$ のグラフは下に下がっていくので，$S(a)$ は単調増加となる．よって，この範囲では $a=-1$ のとき $S(a)$ は最大となる．

　以上より，$-1 \leqq a \leqq 0$ における $S(a)$ の最大値を考えればよい．



$$|x^2+a| = \begin{cases} x^2+a & (|x| \geqq \sqrt{-a} \text{ のとき}) \\ -x^2-a & (|x| \leqq \sqrt{-a} \text{ のとき}) \end{cases}$$

ここで，$\sqrt{-a}=t$ とおくと（$a=-t^2$ となる），面積 $S(a)$ は

$$\begin{aligned} S(a) &= \int_{-1}^{1}\left\{-\frac{1}{2}x^2+2-(x^2+a)\right\}dx-2\int_{-t}^{t}(-x^2-a)\,dx \\ &= \int_{-1}^{1}\left(2+t^2-\frac{3}{2}x^2\right)dx+2\int_{-t}^{t}(x^2-t^2)\,dx \\ &= \int_{0}^{1}\left(4+2t^2-3x^2\right)dx+2\int_{-t}^{t}(x+t)(x-t)\,dx \\ &= \left[-x^3+(4+2t^2)x\right]_0^1-\frac{2}{6}\{t-(-t)\}^3 \\ &= -1+4+2t^2-\frac{8}{3}t^3 \\ &= -\frac{8}{3}t^3+2t^2+3 \end{aligned}$$

$f(t)=-\dfrac{8}{3}t^3+2t^2+3$ とおくと，$f'(t)=-8t^2+4t=4t(1-2t)$ となり，また $-1\leqq a\leqq 0$ のとき，$0\leqq t\leqq 1$ となるので，この範囲における $f(t)$ の増減表は以下のようになる．

t	0	$\cdots$	$\frac{1}{2}$	$\cdots$	1
$f'(t)$	(0)	$+$	0	$-$	
$f(t)$	3	$\nearrow$	$\frac{19}{6}$	$\searrow$	$\frac{7}{3}$

以上より，$-2\leqq a<2$ における $S(a)$ の最大値は，$t=\dfrac{1}{2}$ $\left(a=-\dfrac{1}{4}\right)$ のとき，$\dfrac{19}{6}$