2025年度 東京大学 前期 数学 理系

理科　第１問

(1)　$0 < t < 1$ のとき，条件より，まず

$\mathrm{P}_t(0,\ t),\ \mathrm{Q}_t(t,\ 1),\ \mathrm{R}_t(1,\ 1-t)$

であり，すると

$$\overrightarrow{\mathrm{OS}_t} = (1-t)\overrightarrow{\mathrm{OP}_t} + t\overrightarrow{\mathrm{OQ}_t} = (1-t)\begin{pmatrix} 0 \\ t \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} t \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t^2 \\ 2t-t^2 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{\mathrm{OT}_t} = (1-t)\overrightarrow{\mathrm{OQ}_t} + t\overrightarrow{\mathrm{OR}_t} = (1-t)\begin{pmatrix} t \\ 1 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 1 \\ 1-t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2t-t^2 \\ 1-t^2 \end{pmatrix}$$

となる．これより

$$\overrightarrow{\mathrm{OU}_t} = (1-t)\overrightarrow{\mathrm{OS}_t} + t\overrightarrow{\mathrm{OT}_t} = (1-t)\begin{pmatrix} t^2 \\ 2t-t^2 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 2t-t^2 \\ 1-t^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3t^2-2t^3 \\ 3t-3t^2 \end{pmatrix}$$

となるから

$\mathrm{U}_t(3t^2-2t^3,\ 3t-3t^2)$

である．これは $t=0$ のとき $(0,\ 0)$，$t=1$ のとき $(1,\ 0)$ となり，$\mathrm{U}_0 = \mathrm{A},\ \mathrm{U}_1 = \mathrm{D}$ となるので，$t=0,\ 1$ のときも成り立つ．

(2)　$x = 3t^2-2t^3,\ y = 3t-3t^2$ とおく．

t が $0 \leqq t \leqq 1$ の範囲を動くとき，$\dfrac{dx}{dt} = 6t-6t^2 = 6t(1-t) \geqq 0$ であり，また，$y = 3t(1-t) \geqq 0$ である．

よって，求める面積を S とおくと

$$S = \int_0^1 y\,dx = \int_{t=0}^{t=1} y\cdot\frac{dx}{dt}\,dt = \int_0^1 3t(1-t)\cdot 6t(1-t)\,dt$$

$$= 18\int_0^1 (t^2-2t^3+t^4)\,dt$$

$$= 18\left[\frac{t^3}{3}-\frac{t^4}{2}+\frac{t^5}{5}\right]_0^1 = 18\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{2}+\frac{1}{5}\right) = \frac{3}{5}$$

である．

(3)　求める曲線の長さを l とおくと

$$l = \int_0^a \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt$$

である．ここで，$\dfrac{dy}{dt} = 3-6t = 3(1-2t)$であるから

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 = 36t^2(1-t)^2 + 9(1-2t)^2$$

$$= 9(4t^4 - 8t^3 + 8t^2 - 4t + 1)$$
$$= 9(2t^2 - 2t + 1)^2$$

であり， $2t^2 - 2t + 1 = 2\left(t - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{2} > 0$ に注意すると

$$\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} = 3|2t^2 - 2t + 1| = 3(2t^2 - 2t + 1)$$

となる． よって， 求める曲線の長さは

$$l = \int_0^a 3(2t^2 - 2t + 1)\,dt = 3\left[\frac{2t^3}{3} - t^2 + t\right]_0^a = 2a^3 - 3a^2 + 3a$$

である．

理科　第 2 問

(1)　$f(x)=x-1-\log x$ とおく．このとき，

$$f'(x)=1-\frac{1}{x}=\frac{x-1}{x}$$

となるので，$x>0$ における $f(x)$ の増減表は以下のようになる．

x	(0)	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$		$-$	0	$+$
$f(x)$		$\searrow$	0	$\nearrow$

よって，増減表より，$f(x)\geqq 0\quad(x>0)$ が示されたので，$x>0$ において，$\log x\leqq x-1$ となる．

(2)　(1) より，

$$\log\left(\frac{1+x^{\frac{1}{n}}}{2}\right)\leqq\frac{1+x^{\frac{1}{n}}}{2}-1=\frac{x^{\frac{1}{n}}-1}{2}$$

となるので，

$$n\int_1^2\log\left(\frac{1+x^{\frac{1}{n}}}{2}\right)dx\leqq n\int_1^2\frac{x^{\frac{1}{n}}-1}{2}\,dx\qquad\cdots①$$

ここで，①の右辺について

$$\begin{aligned}n\int_1^2\frac{x^{\frac{1}{n}}-1}{2}\,dx&=\frac{n}{2}\left[\frac{1}{\frac{1}{n}+1}x^{\frac{1}{n}+1}-x\right]_1^2\\&=\frac{n}{2}\left\{\left(\frac{n}{n+1}2^{1+\frac{1}{n}}-2\right)-\left(\frac{n}{n+1}-1\right)\right\}\\&=\left(\frac{n}{n+1}2^{\frac{1}{n}}-1\right)n+\frac{n}{2(n+1)}\\&=\frac{2^{\frac{1}{n}}-1}{\frac{1}{n}}-\frac{1}{1+\frac{1}{n}}\cdot 2^{\frac{1}{n}}+\frac{1}{2+\frac{2}{n}}\\&\to\log 2-1\cdot 1+\frac{1}{2}=\log 2-\frac{1}{2}\quad(n\to\infty)\end{aligned}$$

$\left(g(x)=2^x\text{ とおくと，}g'(x)=(\log 2)\cdot 2^x\text{ であり，}\lim_{n\to\infty}\frac{2^{\frac{1}{n}}-1}{\frac{1}{n}}=\lim_{h\to+0}\frac{2^h-1}{h}=\lim_{h\to+0}\frac{g(h)-g(0)}{h}=g'(0)=\log 2\text{ となる．}\right)$

また，(1) の $x\,(>0)$ を，$\dfrac{1}{x}\,(>0)$ と置き換えると

$$\begin{aligned}\log\left(\frac{1}{x}\right)&\leqq\frac{1}{x}-1\\-\log x&\leqq\frac{1}{x}-1\\\log x&\geqq 1-\frac{1}{x}\end{aligned}$$

となるので，この不等式を用いると

$$\begin{aligned}\log\left(\frac{1+x^{\frac{1}{n}}}{2}\right)&\geqq 1-\frac{2}{1+x^{\frac{1}{n}}}\\\frac{x^{\frac{1}{n}}-1}{1+x^{\frac{1}{n}}}&\leqq\log\left(\frac{1+x^{\frac{1}{n}}}{2}\right)\qquad\cdots②\end{aligned}$$

ここで，$1\leqq x\leqq 2$ において，

$$\frac{x^{\frac{1}{n}}-1}{1+2^{\frac{1}{n}}}\leqq\frac{x^{\frac{1}{n}}-1}{1+x^{\frac{1}{n}}}\qquad\cdots③$$

となり，②，③より，

$$\frac{x^{\frac{1}{n}}-1}{1+2^{\frac{1}{n}}} \leqq \log\left(\frac{1+x^{\frac{1}{n}}}{2}\right)$$

$$\frac{2}{1+2^{\frac{1}{n}}} \cdot \frac{x^{\frac{1}{n}}-1}{2} \leqq \log\left(\frac{1+x^{\frac{1}{n}}}{2}\right)$$

よって，この不等式を 1 から 2 の範囲で積分し，n 倍すると

$$\frac{2}{1+2^{\frac{1}{n}}} \cdot n\int_1^2 \frac{x^{\frac{1}{n}}-1}{2}\,dx \leqq n\int_1^2 \log\left(\frac{1+x^{\frac{1}{n}}}{2}\right)dx \qquad \cdots ④$$

となる．ここで，①の右辺を $n \to \infty$ とした極限の計算結果より，

$$\lim_{n\to\infty}(④\text{の左辺}) = \frac{2}{1+1}\left(\log 2 - \frac{1}{2}\right) = \log 2 - \frac{1}{2}$$

以上により，①，④について，$n \to \infty$ とすると，はさみうちの原理より，求める極限値は

$$\lim_{n\to\infty} n\int_1^2 \log\left(\frac{1+x^{\frac{1}{n}}}{2}\right)dx = \log 2 - \frac{1}{2}$$

注：下からの不等式評価④は，次のように相加・相乗平均不等式を用いて出すこともできる．

$1 \leqq x \leqq 2$ において，$x^{\frac{1}{n}} > 0$ なので，相加・相乗平均の不等式より

$$\log\left(\frac{1+x^{\frac{1}{n}}}{2}\right) \geqq \log\sqrt{1\cdot x^{\frac{1}{n}}} = \frac{1}{2}\log\left(x^{\frac{1}{n}}\right) = \frac{1}{2n}\log x$$

となるので，

$$n\int_1^2 \log\left(\frac{1+x^{\frac{1}{n}}}{2}\right)dx \geqq n\int_1^2 \frac{1}{2n}\log x\,dx \qquad \cdots ⑤$$

⑤の右辺については，

$$\begin{aligned} n\int_1^2 \frac{1}{2n}\log x\,dx &= \frac{1}{2}\int_1^2 \log x\,dx \\ &= \frac{1}{2}\left[x\log x - x\right]_1^2 = \log 2 - \frac{1}{2} \end{aligned}$$

(2)[別解]（部分積分を用いる）

$$n\int_1^2 \log\left(\frac{1+x^{\frac{1}{n}}}{2}\right)dx = n\left[x\log\left(\frac{1+x^{\frac{1}{n}}}{2}\right)\right]_1^2 - n\int_1^2 x\cdot\frac{\frac{1}{n}x^{\frac{1}{n}-1}}{1+x^{\frac{1}{n}}}\,dx$$

$$= 2n\log\left(\frac{1+2^{\frac{1}{n}}}{2}\right) - \int_1^2 \frac{x^{\frac{1}{n}}}{1+x^{\frac{1}{n}}}\,dx \qquad \cdots(*)$$

ここで，$p(x)=\log\left(\dfrac{1+2^x}{2}\right)$ とおくと，$p'(x)=\dfrac{(\log 2)2^x}{1+2^x}$ であり，また $p(0)=0$ より，

$$\lim_{h\to 0}\frac{p(h)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{p(h)-p(0)}{h} = p'(0) = \frac{\log 2}{2}$$

また，$1 \leqq x \leqq 2$ において，$2 \leqq 1+x^{\frac{1}{n}} \leqq x^{\frac{1}{n}}+x^{\frac{1}{n}}$ となるので，この範囲において，

$$\frac{x^{\frac{1}{n}}}{x^{\frac{1}{n}}+x^{\frac{1}{n}}} \leqq \frac{x^{\frac{1}{n}}}{1+x^{\frac{1}{n}}} \leqq \frac{x^{\frac{1}{n}}}{2}$$

となるので，この不等式を 1 から 2 の範囲で積分すると，

$$\int_1^2 \frac{x^{\frac{1}{n}}}{x^{\frac{1}{n}}+x^{\frac{1}{n}}}\,dx \leqq \int_1^2 \frac{x^{\frac{1}{n}}}{1+x^{\frac{1}{n}}}\,dx \leqq \int_1^2 \frac{x^{\frac{1}{n}}}{2}\,dx$$

$$\int_1^2 \frac{1}{2}\,dx \leqq \int_1^2 \frac{x^{\frac{1}{n}}}{1+x^{\frac{1}{n}}}\,dx \leqq \left[\frac{1}{\frac{1}{n}+1}\cdot\frac{x^{\frac{1}{n}+1}}{2}\right]_1^2$$

$$\frac{1}{2}(2-1) \leqq \int_1^2 \frac{x^{\frac{1}{n}}}{1+x^{\frac{1}{n}}}\,dx \leqq \frac{2^{1+\frac{1}{n}}-1}{2+\frac{2}{n}} \qquad \cdots⑥$$

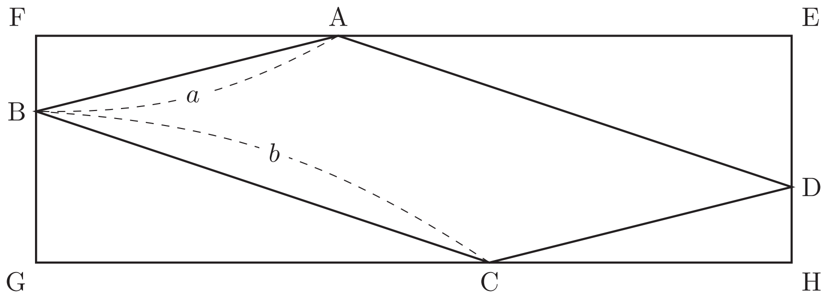
$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$ なので，上の不等式⑥において，$n\to\infty$ とすると，はさみうちの原理より，

$$\lim_{n\to\infty}\int_1^2 \frac{x^{\frac{1}{n}}}{1+x^{\frac{1}{n}}}\,dx = \frac{1}{2}$$

よって，求める極限値は

$$\lim_{n\to\infty}(*) = \lim_{n\to\infty}\left\{2\cdot\frac{p(\frac{1}{n})}{\frac{1}{n}} - \int_1^2 \frac{x^{\frac{1}{n}}}{1+x^{\frac{1}{n}}}\,dx\right\} = 2\cdot\frac{\log 2}{2} - \frac{1}{2} = \log 2 - \frac{1}{2}$$

理科第3問



(1)　点B, C, Dがそれぞれ辺FG, GH, HE上にあることから，$\angle\mathrm{BCD} = \dfrac{5}{6}\pi$ に注意すると，

$$\angle\mathrm{DCH} = \frac{\pi}{6} - \theta$$

である．よって，θ の変域は，$\angle\mathrm{BCG} \geqq 0$ かつ $\angle\mathrm{DCH} \geqq 0$ より，

$$\theta \geqq 0 \text{ かつ } \frac{\pi}{6} - \theta \geqq 0 \quad \text{すなわち} \quad 0 \leqq \theta \leqq \frac{\pi}{6} \qquad \cdots\cdots①$$

である．

$\triangle\mathrm{BCG}$ と $\triangle\mathrm{DAE}$ は，$\angle\mathrm{BGC} = \angle\mathrm{DEA} = \dfrac{\pi}{2}$ である直角三角形であり，また，$\mathrm{BC} /\!\!/ \mathrm{DA}$，$\mathrm{CG} /\!\!/ \mathrm{AE}$ より，

$$\angle\mathrm{BCG} = \angle\mathrm{DAE}$$

である．さらに，$\mathrm{BC} = \mathrm{DA}(= a)$ であるから，

$$\triangle\mathrm{BCG} \equiv \triangle\mathrm{DAE}$$

である．同様にして，

$$\triangle\mathrm{ABF} \equiv \triangle\mathrm{CDH}$$

である．したがって，

$$\begin{aligned} S &= (\text{平行四辺形 ABCD}) + \triangle\mathrm{ABF} + \triangle\mathrm{BCG} + \triangle\mathrm{DAE} + \triangle\mathrm{CDH} \\ &= 2(\triangle\mathrm{ABC} + \triangle\mathrm{BCG} + \triangle\mathrm{CDH}) \end{aligned}$$

である．

いま，

$$\mathrm{CG} = b\cos\theta, \qquad \mathrm{BG} = b\sin\theta$$

より，

$$\triangle\mathrm{BCG} = \frac{1}{2}b\cos\theta \cdot b\sin\theta = \frac{b^2}{2}\sin\theta\cos\theta = \frac{b^2}{4}\sin 2\theta$$

である．$\triangle\mathrm{CDH}$ については，b を a に，θ を $\dfrac{\pi}{6} - \theta$ に置き換えて，

$$\triangle\mathrm{BAF} = \frac{a^2}{4}\sin\left(\frac{\pi}{3} - 2\theta\right)$$

であるから，

$$\begin{aligned} \frac{S}{2} &= \triangle\mathrm{ABC} + \triangle\mathrm{BCG} + \triangle\mathrm{CDH} \\ &= \frac{ab}{4} + \frac{b^2}{4}\sin 2\theta + \frac{a^2}{4}\sin\left(\frac{\pi}{3} - 2\theta\right) \\ &= \frac{ab}{4} + \frac{b^2}{4}\sin 2\theta + \frac{a^2}{4}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos 2\theta - \frac{1}{2}\sin 2\theta\right) \\ &= \frac{ab}{4} + \frac{\sqrt{3}a^2}{8}\cos 2\theta + \frac{2b^2 - a^2}{8}\sin 2\theta \end{aligned}$$

より，

$$S = \frac{ab}{2} + \frac{\sqrt{3}a^2}{4}\cos 2\theta + \frac{2b^2 - a^2}{4}\sin 2\theta \qquad \cdots\cdots②$$

である．

(2)　②をさらに変形すると，

$$S=\frac{ab}{2}+\frac{\sqrt{a^4-a^2b^2+b^4}}{2}\cos(2\theta-\alpha)$$

となる．ただし，α は $0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$，$\cos\alpha=\dfrac{\sqrt{3}a^2}{2\sqrt{a^4-a^2b^2+b^4}}$，$\sin\alpha=\dfrac{2b^2-a^2}{2\sqrt{a^4-a^2b^2+b^4}}$ を満たす角である（$2b^2-a^2>0$ に注意する）．

①より，$0\leqq 2\theta\leqq\dfrac{\pi}{3}$ であるから，$2\theta-\alpha$ のとり得る値の範囲に 0 を含むか否か，すなわち $0<\alpha\leqq\dfrac{\pi}{3}$ と $\dfrac{\pi}{3}<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$ で場合分けする．$\tan\alpha=\dfrac{2b^2-a^2}{\sqrt{3}a^2}>0$ である．

(i)　$0<\alpha\leqq\dfrac{\pi}{3}$ のとき，$0<\dfrac{2b^2-a^2}{\sqrt{3}a^2}\leqq\sqrt{3}$ であるから，

$$2b^2-a^2\leqq 3a^2 \quad \text{すなわち} \quad b^2\leqq 2a^2$$

であり，a，b ともに正，かつ $a\leqq b$ であるから，

$$a\leqq b\leqq\sqrt{2}a$$

である．このとき，$2\theta-\alpha=0$ のとき，

$$S=\frac{ab}{2}+\frac{\sqrt{a^4-a^2b^2+b^4}}{2}$$

をとる．

(ii)　$\dfrac{\pi}{3}<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$ のとき，$\dfrac{2b^2-a^2}{\sqrt{3}a^2}\geqq\sqrt{3}$ であるから，

$$2b^2-a^2>3a^2 \quad \text{すなわち} \quad b^2>2a^2$$

より，

$$b>\sqrt{2}a$$

である．このとき，θ の増加に伴い，S は増加するので，$2\theta=\dfrac{\pi}{3}$ のとき

$$S=\frac{ab}{2}+\frac{\sqrt{3}b^2}{4}$$

をとる．

以上より，S の最大値は，

$$S=\begin{cases}\dfrac{ab}{2}+\dfrac{\sqrt{a^4-a^2b^2+b^4}}{2} & (a\leqq b\leqq\sqrt{2}a\text{ のとき})\\[2ex] \dfrac{ab}{2}+\dfrac{\sqrt{3}b^2}{4} & (b>\sqrt{2}a\text{ のとき})\end{cases}$$

である．

理 科 第 4 問

(1)　$n > a$ とすると，

$$n^2 < n^2 + n - a < n^2 + n < (n+1)^2$$

より $f_a(n) = n^2 + n - a$ は平方数とならない．よって，$f_a(n)$ が平方数ならば $n \leqq a$ である．

(2)　$f_a(a) = a^2$ が平方数であることと (1) より，(i) は

　　$f_a(n) = n^2 + n - a$ が平方数となる正の整数 n は $n < a$ の範囲にはない

ということ，すなわち

　　$k^2 + k - a = l^2$ …… ①　かつ　$0 < k < a$ …… ②　かつ　$l \geqq 0$ …… ③　をみたす

　　整数 k，l は存在しない

ということである．①は

$$(2k+1+2l)(2k+1-2l) = 4a+1 \quad \cdots\cdots ④$$

と変形できるから，(i) の否定と (ii) の否定はそれぞれ

(i)′　④かつ②かつ③をみたす整数 k，l が存在する

(ii)′　$4a+1$ は素数ではない

となり，これらが同値であることを示せばよい．

まず「(i)′ $\Longrightarrow$ (ii)′」を示そう．(i)′ を仮定する．④より①が成立し，①，②より $k^2 > l^2$ で，これと②，③より $k > l$ である．よって，④において

$$2k+1+2l \geqq 2k+1-2l > 1$$

となるから (ii)′ が成立する．

次に「(ii)′ $\Longrightarrow$ (i)′」を示そう．(ii)′ を仮定する．このとき

$$4a+1 = bc \quad かつ \quad b \geqq c \geqq 2$$

となる整数 b，c が存在する．$2k+1+2l = b$ かつ $2k+1-2l = c$ となるように

$$k = \frac{b+c-2}{4}, \qquad l = \frac{b-c}{4}$$

とおけば④が成立する．$4a+1 = bc$ より，合同式の法を 4 として

$$(\,b \equiv 1 \text{ かつ } c \equiv 1\,) \quad \text{または} \quad (\,b \equiv 3 \text{ かつ } c \equiv 3\,)$$

であるから，この k，l は整数となる．$b \geqq c \geqq 2$ より③は成立し，

$$a - k = \frac{bc-1}{4} - \frac{b+c-2}{4} = \frac{(b-1)(c-1)}{4} > 0$$

より②も成立する．これで (i)′ が示された．

理科第5問

(1)　最初に操作 (T_1) を行った後，最も左の札の数字は A_1 か A_2 であり，これは再び操作 (T_1) を行うまで変化しない．この札の数字を B とする．このとき，最後に操作 (T_1) を行った後，左から2枚のうち1枚の札の数字は B である．よって，札の数字が左から $1,\ 2,\ \cdots$ と並ぶことから，B は2以下である．

よって，A_1 と A_2 のうち少なくとも一方は2以下であることが示された．

(2)　(1) より，A_1，A_2 の少なくとも一方は1または2である．

(i)　$A_1 = 1$ のときを考える．最初の操作 (T_1) を行っても札の位置は変わらないので，数字の2から n を，それぞれ1から $n-1$ に対応させることで，最初の状態から A_1 を除いたものは，1から $n-1$ が横一列に並んでいるものと同一視できるから，条件を満たす並べ方は，

$$c_{n-1} \text{ 通り}$$

ある．

(ii)　$A_2 = 1$ のときを考える．最初の操作 (T_1) を行うと必ず札の位置が入れかわる．よって，札の位置を入れかえた後，数字の2から n を，それぞれ1から $n-1$ に対応させることで，操作 (T_1) を行った後の状態から左から1番目の札を除いたものは，数字の1から $n-1$ が横一列に並んでいるものと同一視できるため，条件を満たす並べ方は，

$$c_{n-1} \text{ 通り}$$

ある．

(iii)　$A_1 = 2$ のときを考える．このとき，$A_2 = 1$，$A_2 \geqq 3$ のいずれかである．いずれの場合も，数字の3から n を，それぞれ2から $n-1$ に対応させることで，最初の状態から A_1 を除いたものは，数字の1から $n-1$ が横一列に並んでいるものと同一視できるため，その並べ方は c_{n-1} 通りある．このうち，$A_2 = 1$ のときは (ii) で考えたため，条件を満たす並べ方は

$$c_{n-1} - c_{n-2} \text{ 通り}$$

ある．

(iv)　$A_2 = 2$ のときを考える．$A_1 = 1$ については (i) ですでに考えたため，$A_1 \geqq 3$ のときを考える．$A_1 \geqq 3$ のとき，最初の操作 (T_1) を行って札の位置を入れかえた後の状況は，(iii) において $A_2 \geqq 3$ のときを考えたものと同様である．よって，$A_2 = 2$ のときの並べ方は，

$$c_{n-1} - c_{n-2} \text{ 通り}$$

ある．

以上より，求める並べ方の総数は，

$$c_n = 2c_{n-1} + 2(c_{n-1} - c_{n-2}) = 4c_{n-1} - 2c_{n-2}$$

である．

理科　第 6 問

(1)　点 z は曲線 C 上にあるから,

$$\left| z - \frac{1}{2} \right| = \frac{1}{2} \qquad \cdots\cdots ①$$

$$z \fallingdotseq 0$$

を満たす. $w = \dfrac{1}{z}$ とおくと, $z = \dfrac{1}{w}$ であるから, これを ① に代入して,

$$\left| \frac{1}{w} - \frac{1}{2} \right| = \frac{1}{2}$$

$$\therefore \quad |2 - w| = |w| \ \cdots\cdots ② \quad \text{かつ} \quad w \fallingdotseq 0$$

② は, $w \fallingdotseq 0$ を満たし, さらに,

$$(2 - w)(2 - \overline{w}) = w\overline{w}$$

$$\therefore \quad w + \overline{w} = 2 \qquad \cdots\cdots ⓐ$$

$$\therefore \quad \mathrm{Re}\, w = 1$$

したがって, $w = \dfrac{1}{z}$ の実部は 1 である.

(注)

1°　② は, $|w - 2| = |w|$ となるから, 点 w は, 点 2 と点 0 の垂直二等分線を動く. したがって, w の実部は 1 である.

2°　$w = x + yi$ (x, y は実数) とおいて ⓐ に代入すると,

$$(x + yi) + (x - yi) = 2$$

$$\therefore \quad x = 1$$

したがって, $\dfrac{1}{z}$ の実部は 1 である.

(2)　(1) より $\dfrac{1}{z}$ は実部が 1 である複素数全体をとるから,

$$\frac{1}{\alpha} = 1 + si, \quad \frac{1}{\beta} = 1 + ti \quad (s,\ t \text{ は異なる実数})$$

とおくと,

$$\frac{1}{\alpha^2} = (1 + si)^2 = (1 - s^2) + 2si$$

同様に,

$$\frac{1}{\beta^2} = (1 - t^2) + 2ti$$

であるから, $\dfrac{1}{\alpha^2} + \dfrac{1}{\beta^2} = x + yi$ (x, y は実数) とおくと,

$$\begin{aligned} x + yi &= \{(1 - s^2) + 2si\} + \{(1 - t^2) + 2ti\} \\ &= 2 - (s^2 + t^2) + 2(s + t)i \end{aligned}$$

よって,

$$x = 2 - (s^2 + t^2) \qquad \cdots\cdots ③$$

$$y = 2(s+t) \qquad \cdots\cdots ④$$

と表せる.

④ より,

$$s+t = \frac{y}{2}$$

③, ④ より,

$$\begin{aligned} st &= \frac{1}{2}\{(s+t)^2 - (s^2+t^2)\} \\ &= \frac{1}{2}\left\{\left(\frac{y}{2}\right)^2 - (2-x)\right\} \\ &= \frac{1}{8}(y^2+4x-8) \end{aligned}$$

となるから, s, t を解とする 2 次方程式は,

$$u^2 - \frac{y}{2}u + \frac{1}{8}(y^2+4x-8) = 0 \qquad \cdots\cdots ⑤$$

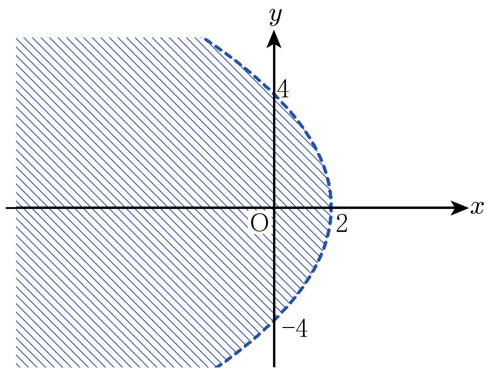
であり, ⑤ が異なる 2 個の実数解をもつ条件を求めて,

$$(\text{判別式}) = \left(\frac{y}{2}\right)^2 - 4\cdot\frac{1}{8}(y^2+4x-8) > 0$$

$$-\frac{1}{4}y^2 - 2x + 4 > 0$$

$$\therefore \quad x < -\frac{1}{8}y^2 + 2 \qquad \cdots\cdots ⑥$$

これを図示するとつぎのようになる. ただし, 境界を除く.



(3) $\gamma = x+yi$ (x, y は実数) とおくと, x, y は ⑥ を満たさないから,

$$x \geqq -\frac{1}{8}y^2 + 2 \qquad \cdots\cdots ⑥'$$

を満たす. 次に ⑥′ を極形式で表す. ⑥′ のとき $\theta \fallingdotseq \pi$ であることも考えて, $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ ($r>0$, $-\pi < \theta < \pi$) とおいて, これを ⑥′ に代入すると

$$r\cos\theta \geqq -\frac{1}{8}(r\sin\theta)^2 + 2$$

$$r\cos\theta \geqq -\frac{1}{8}r^2(1-\cos^2\theta) + 2$$

$$(1-\cos^2\theta)r^2 + 8r\cos\theta - 16 \geqq 0$$

$$\{(1-\cos\theta)r+4\}\{(1+\cos\theta)r-4\} \geqq 0$$

$(1-\cos\theta)r+4>0$ であるから,

$$(1+\cos\theta)r-4 \geqq 0$$

よって, γ の範囲を極形式で表すと,

$$r \geqq \frac{4}{1+\cos\theta} \qquad \cdots\cdots ⑦$$

である. $\gamma = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ とおくと,

$$\frac{1}{\gamma} = \frac{1}{r}(\cos\theta - i\sin\theta)$$

であるから,

$$\mathrm{Re}\left(\frac{1}{\gamma}\right) = \frac{\cos\theta}{r} \qquad \cdots\cdots ⑧$$

を得る.

(i)　$0 \leqq \cos\theta \leqq 1$ のとき, ⑦, ⑧ より,

$$0 \leqq \mathrm{Re}\left(\frac{1}{\gamma}\right) \leqq \frac{\cos\theta(1+\cos\theta)}{4}$$
$$\leqq \frac{1}{2} \qquad (\because\ \ 0 \leqq \cos\theta \leqq 1)$$

となり, 等号は $\theta = 0$ のときに成立する.

(ii)　$-1 < \cos\theta < 0$ のとき, ⑦, ⑧ より,

$$0 \geqq \mathrm{Re}\left(\frac{1}{\gamma}\right) \geqq \frac{\cos\theta(1+\cos\theta)}{4}$$
$$= \frac{1}{4}\left\{\left(\cos\theta + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}\right\}$$
$$\geqq -\frac{1}{16}$$

となり, 等号は $\theta = \pm\frac{2}{3}\pi$ のときに成立する.

以上より, $\frac{1}{\gamma}$ の実部の取りうる値の

最大値は $\frac{1}{2}$,　最小値は $-\frac{1}{16}$

である.

[別解]

$\gamma = x+yi$ (x, y は実数) とおくと γ は (2) で求めた範囲に属さないから, x, y は,

$$x \geqq -\frac{1}{8}y^2+2 \qquad \cdots\cdots ⑨$$

を満たす.

$$\frac{1}{\gamma} = \frac{1}{x+yi} = \frac{x-yi}{x^2+y^2}$$

より, $\mathrm{Re}\left(\frac{1}{\gamma}\right) = \frac{x}{x^2+y^2}$ である. ここで, ⑨ より,

$$y^2 \geqq -8x+16$$

であるから, y^2 の取りうる範囲は,

$$y^2 \geqq -8x+16 \quad \text{かつ} \quad y^2 \geqq 0$$

すなわち,

$$x \leqq 2 \text{ のとき } y^2 \geqq -8x+16, \quad x \geqq 2 \text{ のとき } y^2 \geqq 0$$

したがって,

$$x \leqq 2 \text{ のとき } x^2+y^2 \geqq x^2-8x+16 \quad \therefore \quad 0 < \frac{1}{x^2+y^2} \leqq \frac{1}{(x-4)^2}$$

$$x \geqq 2 \text{ のとき } x^2+y^2 \geqq x^2 \qquad \therefore \quad 0 < \frac{1}{x^2+y^2} \leqq \frac{1}{x^2}$$

である.

(i) $x < 0$ のとき

$$0 > \mathrm{Re}\left(\frac{1}{\gamma}\right) \geqq \frac{x}{(x-4)^2}$$

ここで,

$$\frac{x}{(x-4)^2} = \frac{(x-4)+4}{(x-4)^2} = \frac{1}{x-4} + \frac{4}{(x-4)^2}$$
$$= 4\left(\frac{1}{x-4}+\frac{1}{8}\right)^2 - \frac{1}{16}$$

であるから, $x=-4$ のとき最小値 $-\dfrac{1}{16}$ をとる.

よって,

$$0 > \mathrm{Re}\left(\frac{1}{\gamma}\right) \geqq -\frac{1}{16}$$

(ii) $0 \leqq x \leqq 2$ のとき

$$0 \leqq \mathrm{Re}\left(\frac{1}{\gamma}\right) \leqq \frac{x}{(x-4)^2} \leqq \frac{1}{2} \qquad (\because (x-4)^2 \text{ は } 0 \leqq x \leqq 2 \text{ で減少することより})$$

であるから $x=2$ のとき最大値 $\dfrac{1}{2}$ をとる.

(iii) $x \geqq 2$ のとき

$$0 \leqq \mathrm{Re}\left(\frac{1}{\gamma}\right) \leqq \frac{x}{x^2} = \frac{1}{x} \leqq \frac{1}{2}$$

であるから $x=2$ のとき最大値 $\dfrac{1}{2}$ をとる.

以上より,

$$-\frac{1}{16} \leqq \mathrm{Re}\left(\frac{1}{\gamma}\right) \leqq \frac{1}{2}$$

であるから, $\dfrac{1}{\gamma}$ の実部の

$$\text{最大値は } \frac{1}{2}, \quad \text{最小値は } -\frac{1}{16}$$

である.