[**I**]

$$w=\left(\frac{1+\sqrt{2}}{2}\right)z+\left(\frac{1-\sqrt{2}}{2}\right)\frac{1}{z} \qquad \cdots\cdots ①$$

(1)　$|\,z\,|=1$ より, $z=\cos\theta+i\sin\theta$ $(0\leqq\theta<2\pi)$ とおけて,

$$\begin{aligned}\frac{1}{z}&=z^{-1}\\&=\cos(-\theta)+i\sin(-\theta)\\&=\cos\theta-i\sin\theta\end{aligned}$$

であるから, ① より,

$$\begin{aligned}w&=\left(\frac{1+\sqrt{2}}{2}\right)(\cos\theta+i\sin\theta)+\left(\frac{1-\sqrt{2}}{2}\right)(\cos\theta-i\sin\theta)\\&=\cos\theta+\sqrt{2}i\sin\theta\end{aligned}$$

となる.

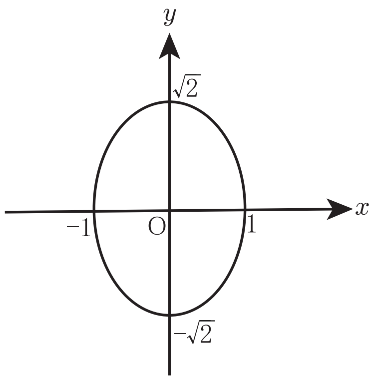
　したがって, $w=x+yi$ (x, y は実数) とおくと,

$$x=\cos\theta,\ y=\sqrt{2}\sin\theta$$

と表せて, θ は $0\leqq\theta<2\pi$ 全体を変化するので, 点 (x, y) の軌跡は, 楕円

$$x^2+\frac{y^2}{2}=1 \qquad \cdots\cdots ②$$

である. これを図示すると次のようになる.



$\cdots\cdots$ (答)

(2)　円の方程式 $\left|z-\dfrac{2+\sqrt{2}}{2}\right|=\sqrt{2}$ は, $z=x+yi$ (x, y は実数) とおくと,

$$\left(x-\frac{2+\sqrt{2}}{2}\right)^2+y^2=2 \qquad \cdots\cdots ③$$

と表せる. ② と ③ の表す曲線の共有点を求めればよい.

② より $y^2=2(1-x^2)$ を ③ に代入して,

$$\left(x-\frac{2+\sqrt{2}}{2}\right)^2+2(1-x^2)=2$$

$$\therefore\quad x^2+(2+\sqrt{2})x-\frac{(2+\sqrt{2})^2}{4}=0$$

これを $-1\leqq x\leqq 1$ のもとで解くと,

$$x=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

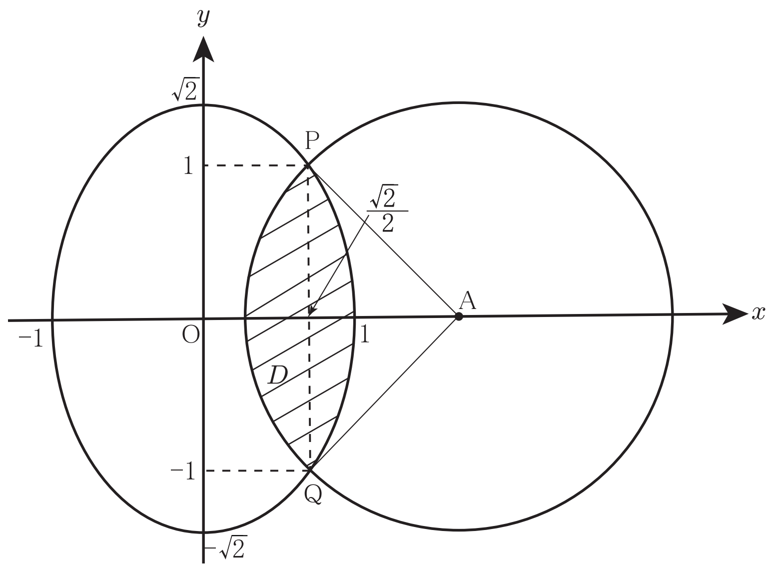
となる. このとき, ② より, $y^2=1$, すなわち $y=\pm1$ を得る.

よって, 複素数平面上において C と円の共有点は,

点 $\dfrac{\sqrt{2}}{2}\pm i$ …… (答)

である.

(3) C と円の両方に囲まれる部分を D とすると, D は図の斜線部になる. ここで, $\mathrm{A}\left(\dfrac{2+\sqrt{2}}{2}\right)$, $\mathrm{P}\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}+i\right)$, $\mathrm{Q}\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}-i\right)$ である.

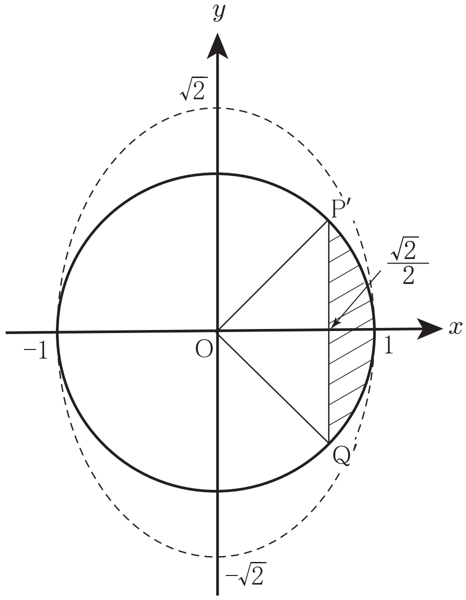


$\mathrm{AP}=\mathrm{AQ}=\sqrt{2}$, $\mathrm{PQ}=2$ より, $\angle\mathrm{PAQ}=\dfrac{\pi}{2}$ であるから, D の $x\leqq\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ の部分の面積を S_1 とおくと,

$$S_1=\frac{1}{2}\left(\sqrt{2}\right)^2\cdot\frac{\pi}{2}-\frac{1}{2}(\sqrt{2})^2=\frac{\pi-2}{2}$$

である.

次に, D の $x \geqq \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ の部分を y 軸方向に, $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ 倍すると次の図のようになる.



図において, $\mathrm{P}'\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}+\dfrac{\sqrt{2}}{2}i\right)$, $\mathrm{Q}'\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}-\dfrac{\sqrt{2}}{2}i\right)$ であり, $\mathrm{OP}'=\mathrm{OQ}'=1$, $\angle\mathrm{P}'\mathrm{OQ}'=\dfrac{\pi}{2}$ であるから, 斜線部の面積は,

$$\frac{1}{2}\cdot 1^2\cdot\frac{\pi}{2}-\frac{1}{2}\cdot 1^2=\frac{\pi-2}{4}$$

であり, D の $x \geqq \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ の部分の面積を S_2 とおくと,

$$S_2=\frac{\pi-2}{4}\times\sqrt{2}$$

である.

よって, 求める面積は,

$$S_1+S_2=\frac{\pi-2}{2}+\frac{\sqrt{2}(\pi-2)}{4}$$
$$=\frac{(2+\sqrt{2})(\pi-2)}{4} \qquad \cdots\cdots(答)$$

である.

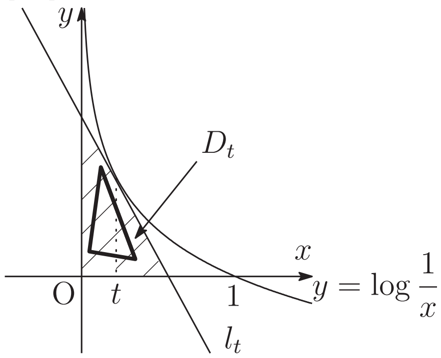
(注)　$|z|=1$ より, $\dfrac{1}{z}=\overline{z}$ であるから,

$$w=\frac{z+\overline{z}}{2}+\sqrt{2}\cdot\frac{z-\overline{z}}{2i}\cdot i$$

$$= \mathrm{Re}(z) + \sqrt{2}\,\mathrm{Im}(z)\ i$$

と表せる. C は円 $|\,z\,| = 1$ を虚軸方向に $\sqrt{2}$ 倍拡大した曲線であることがわかる.
($\mathrm{Re}(z)$, $\mathrm{Im}(z)$ はそれぞれ z の実部, 虚部を表す.)

[**II**]



原点をOとして，曲線 $y=\log\dfrac{1}{x}$ の $x=t(>0)$ における接線を l_t とし，l_t と x 軸，y 軸で囲まれる部分 (境界線も含む) を D_t とする．曲線 $y=\log\dfrac{1}{x}$ が下に凸であることから，D_t は D に含まれ，うまく $0<t\leqq 1$ なる t をとることにより，D に含まれる三角形は D_t に含まれる三角形と言い換えることができる．また D_t に含まれる三角形の面積の最大値は D_t の面積であるから，D_t の面積 $S(t)$ $(0<t\leqq 1)$ の最大値が求めるものである．

$\left(\log\dfrac{1}{x}\right)'=-\dfrac{1}{x}$ より，l_t の式は,

$$y=-\frac{1}{t}(x-t)+\log\frac{1}{t},\quad \text{すなわち,}\quad y=-\frac{x}{t}+1-\log t$$

であり，この式で,

$x=0$ とすると, $y=1-\log t$

$y=0$ とすると, $x=t(1-\log t)$

となるから,

$$S(t)=\frac{1}{2}\cdot t(1-\log t)(1-\log t)=\frac{1}{2}t(1-\log t)^2$$

と表される．ここで,

$$\begin{aligned}S'(t)&=\frac{1}{2}(1-\log t)^2+\frac{1}{2}t\cdot 2(1-\log t)\left(-\frac{1}{t}\right)\\&=-\frac{1}{2}(1-\log t)(1+\log t)\end{aligned}$$

であるから，$S(t)$ $(0<t\leqq 1)$ の増減は以下の表のようになる．

t	(0)	$\cdots$	$\frac{1}{e}$	$\cdots$	1
$S'(t)$		$+$	0	$-$	
$S(t)$		$\nearrow$	$\frac{2}{e}$	$\searrow$	

したがって，求める最大値は,

$\dfrac{2}{e}$ ……(答)

である．

【注】

「うまく $0<t \leqq 1$ なる t をとることにより，D に含まれる三角形は D_t に含まれる三角形と言い換えることができる」ことは以下のように説明できる．

D に含まれる三角形を x 軸方向に平行移動して，初めて曲線 $y=\log \dfrac{1}{x}(0<x \leqq 1)$ と共有点をもつところまで動かす．この共有点は 1 つである．その共有点の x 座標を t とすればよい．

[III]

(1)(2)　1があった場所に2があるとする．

2があった場所に1がある場合，残り $n-2$ 箇所でどのカードも現在とは異なる位置に移動するように並び替えればよいので，a_{n-2} 通りだけ並べ方がある．

2があった場所に1以外がある場合，1が書かれたカードを2が書かれているのと同一視することで，$n-1$ 箇所でどのカードも現在の位置とは異なる位置に移動するように並び替えたと考えればよく，a_{n-1} 通りだけ並べ方がある．

よって，1があった場所に2があるときの順列の総数は，

$$a_{n-2}+a_{n-1}$$

である．

1があった場所に並ぶカードの選び方が $n-1$ 通りあり，このそれぞれについて上の並べ方があるので，

$$a_n=(n-1)(a_{n-1}+a_{n-2}) \quad (n \geqq 3) \qquad \cdots\cdots (2) \text{ の (答)}$$

が成り立つ．これにより，

$$a_4=3\cdot(2+1)=9 \qquad \cdots\cdots (1) \text{ の (答)}$$

である．

(3)　$p_n=\dfrac{a_n}{n!}$ で与えられることに注意する．

$n \geqq 3$ のとき，(2) の両辺を $n!$ で割ると，

$$\frac{a_n}{n!}=\frac{n-1}{n}\cdot\frac{a_{n-1}}{(n-1)!}+\frac{1}{n}\cdot\frac{a_{n-2}}{(n-2)!}$$

すなわち，

$$p_n=\frac{n-1}{n}p_{n-1}+\frac{1}{n}p_{n-2}$$

を得て，これを変形すると，

$$p_n-p_{n-1}=-\frac{1}{n}(p_{n-1}-p_{n-2})$$

となる．両辺に $n!(-1)^n$ をかけると，

$$n!(-1)^n(p_n-p_{n-1})=(n-1)!(-1)^{n-1}(p_{n-1}-p_{n-2})$$

となるから，数列 $\{n!(-1)^n(p_n-p_{n-1})\}$ $(n \geqq 2)$ は定数列である．したがって，

$$n!(-1)^n(p_n-p_{n-1})=2!(-1)^2(p_2-p_1)=2\cdot1\cdot\frac{1}{2}=1$$

であるから，

$$p_n-p_{n-1}=\frac{1}{n!(-1)^n}=\frac{(-1)^n}{n!} \quad (n \geqq 2) \qquad \cdots\cdots \text{(答)}$$

である．

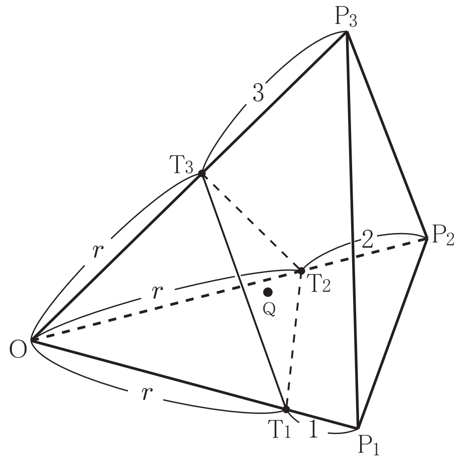
【参考】

本問のように並び替える順列を「完全順列」や「撹乱 (かくらん) 順列」などという．また，このような順列の総数を求める問題を「モンモールの問題」という．

[IV]

$$\overrightarrow{\mathrm{OQ}} = \frac{1}{4}(\overrightarrow{\mathrm{OP_1}} + \overrightarrow{\mathrm{OP_2}} + \overrightarrow{\mathrm{OP_3}}) \qquad \cdots\cdots ①$$

(1)　球面 S と球面 S_1, S_2, S_3 の接点を $\mathrm{T_1, T_2, T_3}$ とおく. 4 つの球面がそれぞれ外接していることより, 次の図のようになる.



点 Q は平面 $\mathrm{T_1T_2T_3}$ 上にあるから,

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OQ}} &= (1-s-t)\overrightarrow{\mathrm{OT_1}} + s\overrightarrow{\mathrm{OT_2}} + t\overrightarrow{\mathrm{OT_3}} \\ &= (1-s-t)\cdot\frac{r}{r+1}\overrightarrow{\mathrm{OP_1}} + s\cdot\frac{r}{r+2}\overrightarrow{\mathrm{OP_2}} + t\cdot\frac{r}{r+3}\overrightarrow{\mathrm{OP_3}}\end{aligned}$$

(s, t は実数)

と表せる.

$\overrightarrow{\mathrm{OP_1}}, \overrightarrow{\mathrm{OP_2}}, \overrightarrow{\mathrm{OP_3}}$ は線型独立であるから, ① より,

$$(1-s-t)\cdot\frac{r}{r+1} = \frac{1}{4} \qquad \cdots\cdots ②$$

$$s\cdot\frac{r}{r+2} = \frac{1}{4} \qquad \cdots\cdots ③$$

$$t\cdot\frac{r}{r+3} = \frac{1}{4} \qquad \cdots\cdots ④$$

が成り立つ.

③ より $s = \frac{r+2}{4r}$, ④ より $t = \frac{r+3}{4r}$, これらを ② に代入して,

$$\left(1 - \frac{r+2}{4r} - \frac{r+3}{4r}\right)\cdot\frac{r}{r+1} = \frac{1}{4}$$

$$\therefore \quad 2r - 5 = r + 1$$

$$\therefore \quad r = 6 \qquad \cdots\cdots (答)$$

(2)　$r = 6$ より,

$$\mathrm{OP_1}=7,\ \mathrm{OP_2}=8,\ \mathrm{OP_3}=9$$

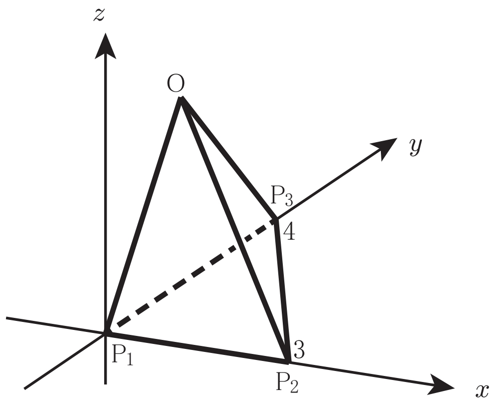
である．また，S_1, S_2, S_3 がそれぞれ外接していることから，

$$\mathrm{P_1P_2}=3,\ \mathrm{P_1P_3}=4,\ \mathrm{P_2P_3}=5$$

であり，$(\mathrm{P_1P_2})^2+(\mathrm{P_1P_3})^2=(\mathrm{P_2P_3})^2$ が成り立つから，$\angle \mathrm{P_2P_1P_3}=\dfrac{\pi}{2}$ である．それゆえ，

$$\mathrm{P_1}(0,0,0),\ \mathrm{P_2}(3,0,0),\ \mathrm{P_3}(0,4,0),\ \mathrm{O}(a,b,c)\quad (c>0)$$

となるように座標系を設定することができる．



$$\mathrm{OP_1}=7 \text{ より}\quad a^2+b^2+c^2=49 \qquad \cdots\cdots ⑤$$
$$\mathrm{OP_2}=8 \text{ より}\quad (a-3)^2+b^2+c^2=64 \qquad \cdots\cdots ⑥$$
$$\mathrm{OP_3}=9 \text{ より}\quad a^2+(b-4)^2+c^2=81 \qquad \cdots\cdots ⑦$$

が成り立つ．

⑥ − ⑤ より　$-6a+9=15$　∴　$a=-1$

⑦ − ⑤ より　$-8b+16=32$　∴　$b=-2$

これらを ⑤ に代入して，

$$(-1)^2+(-2)^2+c^2=49$$
$$c=2\sqrt{11}\quad (\because c>0)$$

したがって，$\triangle \mathrm{P_1P_2P_3}$ を底面と見たときの四面体 $\mathrm{OP_1P_2P_3}$ の高さは $2\sqrt{11}$ である．一方，

$$\triangle \mathrm{P_1P_2P_3}=\frac{1}{2}\cdot 3\cdot 4=6$$

であるから，求める体積は，

$$\frac{1}{3}\cdot 6\cdot 2\sqrt{11}=4\sqrt{11} \qquad \cdots\cdots (答)$$

である．

[V]

(1)　$y=\sqrt[3]{x^2+2}$ のとき，

$$y'=\frac{1}{3}(x^2+2)^{-\frac{2}{3}}\cdot 2x=\frac{2x}{3\sqrt[3]{(x^2+2)^2}}$$

であるから，k の値は，

$$k=\frac{2a}{3\sqrt[3]{(a^2+2)^2}} \qquad \cdots\cdots ①$$

である．いま，$x\neq 0$ のとき $y'\neq 0$ であるから，$k\neq 0$ である．

C の方程式の両辺を 3 乗すると，

$$y^3=x^2+2$$

となり，これに l の式を変形した $x=\dfrac{y-c}{k}$ を代入して，

$$y^3=\frac{(y-c)^2}{k^2}+2$$

より

$$k^2y^3-y^2+2cy-2k^2-c^2=0$$

を得る．この方程式は b を重解にもち，それ以外の解が b' であるから，解と係数の関係より

$$2b+b'=\frac{1}{k^2} \qquad \cdots\cdots ②(答)$$

である．

(2)　$b=\sqrt[3]{a^2+2}$ より $a^2=b^3-2$ であるから，①，②より，

$$2b+b'=\frac{9\sqrt[3]{(a^2+2)^4}}{4a^2}=\frac{9b^4}{4(b^3-2)}$$

となる．これより，

$$b'=\frac{9b^4}{4(b^3-2)}-2b=\frac{b^4+16b}{4b^3-8} \qquad \cdots\cdots ③(答)$$

と表される．

(3)　有理数どうしの加減乗除の結果は有理数であることに注意する．

③より，b が有理数ならば b' は有理数である．

また，①と $b=\sqrt[3]{a^2+2}$ より，

$$k=\frac{2a}{3\sqrt[3]{(a^2+2)^2}}=\frac{2a}{3b^2}$$

であるから，a，b が有理数ならば k は有理数である．

したがって，$c=b-ka$ も有理数である．

よって，$a'=\dfrac{b'-c}{k}$ より a' も有理数である．　(証明終)

(4)　③に $b=\dfrac{p}{2^r q}$ を代入して，

$$b'=\frac{\dfrac{p^4}{2^{4r}q^4}+16\cdot\dfrac{p}{2^r q}}{4\left(\dfrac{p^3}{2^{3r}q^3}-2\right)}=\frac{p^4+16p\cdot 2^{3r}q^3}{4\,(p^3\cdot 2^r q-2\cdot 2^{4r}q^4)}=\frac{p^4+2^{3r+4}pq^3}{2^{r+2}(p^3q-2^{3r+1}q^4)}\quad\cdots\cdots④$$

となる．

④の分子は第 1 項が奇数，第 2 項が偶数であるから奇数である．④の分母の ( ) 内は第 1 項が奇数，第 2 項が偶数であるから奇数である．

よって，④の分子が p' であり，④の分母の ( ) 内が q' としてよい．

したがって，

$$2^s=2^{r+2}$$

であるから，

$$s=r+2\qquad\cdots\cdots(答)$$

と表される．

(5)　$a=5$，$b=3$ のとき，$b=\dfrac{3}{2^0\cdot 1}$ と表されることから，(3)，(4) より，有理数 a'，b' が存在し，$b'=\dfrac{p'}{2^2\cdot q'}$（$p'$ と q' は奇数）で表される．

分母の 2 の指数が増加することから $b\neq b'$ であるため，$\mathrm{P}\neq\mathrm{P}'$ である．また，分母の 2 の指数で同一のものが存在しないため，点 P から P′ を得るのと同じ操作を繰り返したとき同一の点が生じることはない．

よって，点 P から P′ を得るのと同じ操作を無数に繰り返すことで，C 上に x，y 座標がともに有理数であるような点を無数に構成できるので，C 上に x 座標と y 座標がともに有理数であるような点が無数に存在する．(証明終)

【参考】

曲線 $y=\sqrt[3]{x^2+2}$ は楕円曲線と呼ばれる曲線であり，概形は次のようになる．