

2026年度 大阪大学 前期 数学 文系

1

(1) 与えられた漸化式と $b_n = \log_2 a_{n+1} - \log_2 a_n$ より

$$\begin{aligned} b_{n+1} &= \log_2 a_{n+2} - \log_2 a_{n+1} \\ &= \log_2 \frac{3^n a_{n+1}^2}{a_n} - \log_2 a_{n+1} \\ &= n \log_2 3 + 2 \log_2 a_{n+1} - \log_2 a_n - \log_2 a_{n+1} \\ &= \log_2 a_{n+1} - \log_2 a_n + n \log_2 3 \\ &= b_n + n \log_2 3 \end{aligned}$$

であり, 数列 $\{b_n\}$ の階差数列の一般項は

$$n \log_2 3$$

である. また

$$b_1 = \log_2 a_2 - \log_2 a_1 = 1$$

であるから, $n \geq 2$ のとき

$$\begin{aligned} b_n &= b_1 + \sum_{k=1}^{n-1} k \log_2 3 \\ &= 1 + \frac{1}{2}(n-1)n \log_2 3 \end{aligned}$$

である. これは $n=1$ のときも成り立つ. したがって, 数列 $\{b_n\}$ の一般項は

$$b_n = 1 + \frac{1}{2}n(n-1) \log_2 3 \quad \dots\dots(\text{答})$$

である.

(2) $b_n = \log_2 a_{n+1} - \log_2 a_n$ より, 数列 $\{\log_2 a_n\}$ の階差数列が $\{b_n\}$ であり, $n \geq 2$ のとき

$$\begin{aligned} \log_2 a_n &= \log_2 a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} b_k \\ &= \sum_{k=1}^{n-1} \left\{ 1 + \frac{1}{2}k(k-1) \log_2 3 \right\} \\ &= (n-1) + \frac{1}{2}(\log_2 3) \sum_{k=1}^{n-1} (k^2 - k) \\ &= (n-1) + \frac{1}{2}(\log_2 3) \left\{ \frac{1}{6}(n-1)n(2n-1) - \frac{1}{2}(n-1)n \right\} \\ &= (n-1) + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{6}n(n-1) \{ (2n-1) - 3 \} \log_2 3 \\ &= (n-1) \log_2 2 + \frac{1}{6}n(n-1)(n-2) \log_2 3 \\ &= \log_2 2^{n-1} + \log_2 3^{\frac{1}{6}n(n-1)(n-2)} \\ &= \log_2 \left\{ 2^{n-1} \cdot 3^{\frac{1}{6}n(n-1)(n-2)} \right\} \end{aligned}$$

である. これは $n=1$ のときも成り立つ. したがって, 数列 $\{a_n\}$ の一般項は

$$a_n = 2^{n-1} \cdot 3^{\frac{1}{6}n(n-1)(n-2)} \quad \dots\dots(\text{答})$$

である.

(別解)

恒等式

$$k(k-1) = \frac{1}{3} \{ (k+1)k(k-1) - k(k-1)(k-2) \}$$

を利用すると

$$\begin{aligned} \log_2 a_n &= \log_2 a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} b_k \\ &= \sum_{k=1}^{n-1} \left\{ 1 + \frac{1}{2} k(k-1) \log_2 3 \right\} \\ &= (n-1) + \frac{1}{6} (\log_2 3) \sum_{k=1}^{n-1} \{ (k+1)k(k-1) - k(k-1)(k-2) \} \\ &= (n-1) \log_2 2 + \frac{1}{6} n(n-1)(n-2) \log_2 3 \\ &= \log_2 2^{n-1} + \log_2 3^{\frac{1}{6} n(n-1)(n-2)} \\ &= \log_2 \left\{ 2^{n-1} \cdot 3^{\frac{1}{6} n(n-1)(n-2)} \right\} \end{aligned}$$

と計算できる.

2

(1) $OB=OC=1$, $\angle BOC = 60^\circ$ より, $\triangle OBC$ は正三角形であり, $OA=1$, $\angle AOB = \angle AOC = 90^\circ$ より $\vec{OA}$ は 3 点 O, B, C を含む平面に垂直である. よって 4 点 O, A, B, C は四面体の 4 頂点であり,

$$|\vec{a}| = |\vec{b}| = |\vec{c}| = 1$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot \vec{c} = 0, \vec{b} \cdot \vec{c} = 1 \cdot 1 \cdot \cos 60^\circ = \frac{1}{2}$$

である. ここで, $t > 0$ と $\vec{OD} = t\vec{OB}$, $\vec{OE} = (2t+1)\vec{OC}$ より, 4 点 O, A, D, E は四面体の 4 頂点であるから, 4 点 P, A, D, E が同一平面上にあるとき, 実数 α, β を用いて,

$$\vec{OP} = (1 - \alpha - \beta)\vec{OA} + \alpha\vec{OD} + \beta\vec{OE} \dots (*)$$

と表せる.

条件より,

$$\begin{cases} \vec{OA} \cdot \vec{OP} = -1 \\ \vec{OB} \cdot \vec{OP} = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} \vec{a} \cdot \{(1 - \alpha - \beta)\vec{a} + t\alpha\vec{b} + (2t+1)\beta\vec{c}\} = -1 \\ \vec{b} \cdot \{(1 - \alpha - \beta)\vec{a} + t\alpha\vec{b} + (2t+1)\beta\vec{c}\} = 1 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} (1 - \alpha - \beta)|\vec{a}|^2 + t\alpha\vec{a} \cdot \vec{b} + (2t+1)\beta\vec{a} \cdot \vec{c} = -1 \\ (1 - \alpha - \beta)\vec{a} \cdot \vec{b} + t\alpha|\vec{b}|^2 + (2t+1)\beta\vec{b} \cdot \vec{c} = 1 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} \alpha + \beta = 2 \\ t\alpha + \frac{2t+1}{2}\beta = 1 \end{cases}$$

$$\therefore \alpha = 4t, \beta = 2 - 4t$$

よって,

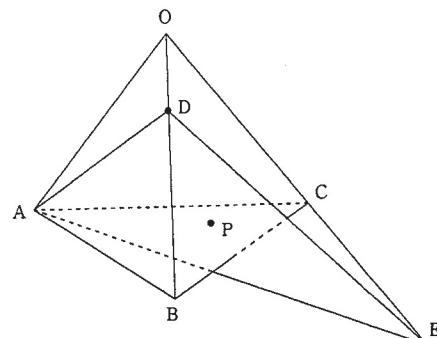
$$\vec{AP} = \vec{OP} - \vec{OA} = -(\alpha + \beta)\vec{a} + t\alpha\vec{b} + (2t+1)\beta\vec{c}$$

に代入して,

$$\vec{AP} = -2\vec{a} + 4t^2\vec{b} - 2(4t^2 - 1)\vec{c} \quad \dots (\text{答})$$

(2) $4t^2 = X$ とおくと, $t > 0$ のとき $X > 0$ であり,

$$\vec{AP} = -2\vec{a} + X\vec{b} - 2(X - 1)\vec{c}$$



と表せる.

$$\begin{aligned} |\overrightarrow{AP}|^2 &= |-2\vec{a} + X\vec{b} - 2(X-1)\vec{c}|^2 \\ &= 4|\vec{a}|^2 + X^2|\vec{b}|^2 + 4(X-1)^2|\vec{c}|^2 - 4X\vec{a} \cdot \vec{b} - 4X(X-1)\vec{b} \cdot \vec{c} + 8(X-1)\vec{a} \cdot \vec{c} \\ &= 4 + X^2 + 4(X-1)^2 - 2X(X-1) \\ &= 3X^2 - 6X + 8 \\ &= 3(X-1)^2 + 5 \end{aligned}$$

よって, $X=1$ のとき, すなわち ($t>0$ に注意して),

$$4t^2 = 1 \quad \therefore t = \frac{1}{2} \quad \dots (\text{答})$$

のとき $|\overrightarrow{AP}|^2$ は最小値 5 をとり, このとき $|\overrightarrow{AP}|$ も最小となる. 求める $|\overrightarrow{AP}|$ の最小値は

$$\sqrt{5} \quad \dots (\text{答})$$

<注 1>

条件より, O を原点とする座標空間で, $A(1, 0, 0)$, $B(0, 1, 0)$, $C\left(0, \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ と座標を設定してもよい.

<注 2>

4 点 O, A, D, E が四面体の 4 頂点である ($\triangle ADE$ が存在する) ことを論じないまま (*) または $\overrightarrow{AP} = \alpha\overrightarrow{AD} + \beta\overrightarrow{AE}$ とおいてしまうことは不備である.

3

$$\begin{aligned}
 f(x) &= 4ax^3 + \frac{1-a}{a} - 6 \int_{x-1}^x (t^2 + t) dt \\
 &= 4ax^3 + \frac{1-a}{a} - 6 \left[\frac{1}{3}t^3 + \frac{1}{2}t^2 \right]_{x-1}^x \\
 &= 4ax^3 + \frac{1-a}{a} - 6 \left\{ \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}(x-1)^3 - \frac{1}{2}(x-1)^2 \right\} \\
 &= 4ax^3 + \frac{1-a}{a} - 6 \left\{ \frac{1}{3}(3x^2 - 3x + 1) + \frac{1}{2}(2x - 1) \right\} \\
 &= 4ax^3 + \frac{1-a}{a} - 6 \left(x^2 - \frac{1}{6} \right) \\
 &= 4ax^3 - 6x^2 + \frac{1}{a}
 \end{aligned}$$

これより, $a > 0$ を考えて,

$$f'(x) = 12ax^2 - 12x = 12ax \left(x - \frac{1}{a} \right)$$

(i) $0 < a \leq 1$ …①

のとき, $\frac{1}{a} \geq 1$ であるから, $0 \leq x \leq 1$ において,

x	0 … 1
$f'(x)$	—
$f(x)$	↘

よって, $f(x)$ の最小値 m は,

$$m = f(1) = 4a - 6 + \frac{1}{a} = \frac{4a^2 - 6a + 1}{a}$$

これより, $m > 0$ となるとき, $a > 0$ を考えて,

$$4a^2 - 6a + 1 > 0 \quad \therefore a < \frac{3-\sqrt{5}}{4}, \frac{3+\sqrt{5}}{4} < a \quad \cdots \textcircled{2}$$

①, ②, $2 < \sqrt{5} < 3$ より,

$$0 < a < \frac{3-\sqrt{5}}{4}$$

(ii) $1 < a \quad \cdots \textcircled{3}$

のとき, $0 < \frac{1}{a} < 1$ であるから, $0 \leq x \leq 1$ において,

x	0	$\cdots$	$\frac{1}{a}$	$\cdots$	1
$f'(x)$		-	0	+	
$f(x)$		$\searrow$		$\nearrow$	

よって,

$$m = f\left(\frac{1}{a}\right) = \frac{4}{a^2} - \frac{6}{a^2} + \frac{1}{a} = \frac{a-2}{a^2}$$

これより, $m > 0$ となるとき, $a^2 > 0$ を考えて,

$$a-2 > 0 \quad \therefore a > 2 \quad \cdots \textcircled{4}$$

③, ④より,

$$a > 2$$

(i), (ii) より, 求める a の値の範囲は,

$$0 < a < \frac{3-\sqrt{5}}{4}, 2 < a \quad \cdots \text{(答)}$$