

2026年度 一橋大学 前期 数学

1

$$\begin{aligned}|x^2 - 7x + 1| = y^2 &\Leftrightarrow x^2 - 7x + 1 = \pm y^2 \\&\Leftrightarrow \left(x - \frac{7}{2}\right)^2 - \frac{45}{4} = \pm y^2 \\&\Leftrightarrow (2x - 7)^2 \mp 4y^2 = 45 \quad \cdots \textcircled{1} \quad (\text{ここまで, 複号同順})\end{aligned}$$

(i) ①の左辺の複号が-のとき

$$\begin{aligned}\textcircled{1} &\Leftrightarrow (2x - 7)^2 - (2y)^2 = 45 \\&\Leftrightarrow (2x + 2y - 7)(2x - 2y - 7) = 45\end{aligned}$$

$y > 0$ より, $2x + 2y - 7 > 2x - 2y - 7$ であることに注意すると,

$$\begin{aligned}(2x + 2y - 7, 2x - 2y - 7) &= (45, 1), (15, 3), (9, 5), (-1, -45), (-3, -15), (-5, -9) \\ \therefore (x, y) &= (15, 11), (8, 3), (7, 1), (-8, 11), (-1, 3), (0, 1)\end{aligned}$$

(ii) ①の左辺の複号が+のとき

$$\textcircled{1} \Leftrightarrow (2x - 7)^2 + 4y^2 = 45 \quad \cdots \textcircled{2}$$

②より, $4y^2 \leq 45$ であるから, $y > 0$ より, $y = 1, 2, 3$ であることが必要である.

$y = 1$ のとき, ①は, $(2x - 7)^2 = 41$ となるが, これを満たす整数 x は存在しない.

$y = 2$ のとき, ①は, $(2x - 7)^2 = 29$ となるが, これを満たす整数 x は存在しない.

$y = 3$ のとき, ①は, $(2x - 7)^2 = 9$ となり, $2x - 7 = \pm 3 \quad \therefore x = 5, 2$

以上から, 求める整数の組 (x, y) は,

$$(x, y) = (15, 11), (8, 3), (7, 1), (-8, 11), (-1, 3), (0, 1), (5, 3), (2, 3) \quad \cdots (\text{答})$$

である.

2

$$a_1 = \sqrt{2}, a_2 = \sqrt{5} \cdots \cdots \textcircled{1}, a_{n+2} = a_{n+1} \cdot a_n^2 \cdots \cdots \textcircled{2}$$

$a_n > 0, a_{n+1} > 0$ とすると、 $\textcircled{2}$ より $a_{n+2} > 0$ となることと、 $\textcircled{1}$ より、帰納的に、すべての自然数 n に対して $a_n > 0$ が成り立つ。

$$b_n = \log_{10} a_n$$

とおくと、

$$b_n \geq 2026 \cdots \cdots \textcircled{3}$$

となる最小の n が求めるものである。

$\textcircled{1}$ より、

$$b_1 = \log_{10} a_1 = \log_{10} \sqrt{2} = \frac{1}{2} \log_{10} 2, b_2 = \log_{10} a_2 = \log_{10} \sqrt{5} = \frac{1}{2} \log_{10} 5 \cdots \cdots \textcircled{4}$$

であり、 $\textcircled{2}$ より、

$$\log_{10} a_{n+2} = \log_{10} (a_{n+1} \cdot a_n^2) = \log_{10} a_{n+1} + 2 \log_{10} a_n$$

$$\therefore b_{n+2} = b_{n+1} + 2b_n \cdots \cdots \textcircled{5}$$

である。 $\textcircled{5}$ は、

$$b_{n+2} + b_{n+1} = 2(b_{n+1} + b_n) \cdots \cdots \textcircled{6}$$

$$b_{n+2} - 2b_{n+1} = -(b_{n+1} - 2b_n) \cdots \cdots \textcircled{7}$$

と変形できる。

$\textcircled{4}, \textcircled{6}$ より、数列 $\{b_{n+1} + b_n\}$ は、

$$\text{初項: } b_2 + b_1 = \frac{1}{2} \log_{10} 10 = \frac{1}{2}, \text{ 公比: } 2$$

の等比数列であるから、

$$b_{n+1} + b_n = \frac{1}{2} \cdot 2^{n-1} = 2^{n-2} \cdots \cdots \textcircled{8}$$

であり、 $\textcircled{4}, \textcircled{7}$ より、数列 $\{b_{n+1} - 2b_n\}$ は、

$$\text{初項: } b_2 - 2b_1 = \frac{1}{2} (\log_{10} 5 - 2 \log_{10} 2) = \frac{1}{2} \log_{10} \frac{5}{4}, \text{ 公比: } -1$$

の等比数列であるから、

$$b_{n+1} - 2b_n = \frac{1}{2} \left(\log_{10} \frac{5}{4} \right) (-1)^{n-1} \cdots \cdots \textcircled{9}$$

である。

したがって、 $\textcircled{8}, \textcircled{9}$ より、

$$b_n = \frac{1}{3} \left\{ 2^{n-2} - \frac{1}{2} \left(\log_{10} \frac{5}{4} \right) (-1)^{n-1} \right\} \cdots \cdots \textcircled{10}$$

である。

$\textcircled{3}, \textcircled{10}$ より、

$$\frac{1}{3} \left\{ 2^{n-2} - \frac{1}{2} \left(\log_{10} \frac{5}{4} \right) (-1)^{n-1} \right\} \geq 2026$$

すなわち、

$$2^{n-2} - \frac{1}{2} \left(\log_{10} \frac{5}{4} \right) (-1)^{n-1} \geq 6078 \quad \dots\dots \textcircled{11}$$

となる最小の n が求めるものである.

$$1 < \frac{5}{4} < 10 \text{ より,}$$

$$0 < \log_{10} \frac{5}{4} < 1 \quad \therefore \quad -\frac{1}{2} < -\frac{1}{2} \left(\log_{10} \frac{5}{4} \right) (-1)^{n-1} < \frac{1}{2}$$

であることに注意すると,

(i) $n \leq 14$ のとき

$$2^{n-2} - \frac{1}{2} \left(\log_{10} \frac{5}{4} \right) (-1)^{n-1} < 2^{12} + \frac{1}{2} = 4096 + \frac{1}{2}$$

となり, ⑪は成り立たない.

(ii) $n = 15$ のとき

$$2^{n-2} - \frac{1}{2} \left(\log_{10} \frac{5}{4} \right) (-1)^{n-1} > 2^{13} - \frac{1}{2} = 8192 - \frac{1}{2}$$

となり, ⑪は成り立つ.

以上から, 求める最小の n は,

$$n = 15$$

である.

3

条件(i)より、 $f'(x)$ は2次の項の係数が3である2次関数である。条件(ii)より、 α, β は異なる実数であり、 $f'(x) = 0$ は $x = \alpha, \beta$ を解にもつから、

$$f'(x) = 3(x - \alpha)(x - \beta)$$

と表せる。

2点 $(\alpha, f(\alpha)), (\beta, f(\beta))$ を通る直線の傾き k は、 $f(\beta) - f(\alpha) = \int_{\alpha}^{\beta} f'(x) dx$ を用いると、

$$\begin{aligned} k &= \frac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha} \\ &= \frac{1}{\beta - \alpha} \int_{\alpha}^{\beta} f'(x) dx \\ &= \frac{1}{\beta - \alpha} \int_{\alpha}^{\beta} 3(x - \alpha)(x - \beta) dx \\ &= \frac{3}{\beta - \alpha} \cdot \left\{ -\frac{1}{6}(\beta - \alpha)^3 \right\} \\ &= -\frac{1}{2}(\beta - \alpha)^2 \end{aligned} \quad \dots\dots ①$$

である。

また、条件(iii)より、 $\beta - \alpha$ の変域は、

$$1 - (-1) \leq \beta - \alpha \leq 2 - (-2)$$

$$\therefore 2 \leq \beta - \alpha \leq 4 \quad \dots\dots ②$$

である。

①, ②より、 k のとりうる値の範囲は、

$$-\frac{1}{2} \cdot 4^2 \leq k \leq -\frac{1}{2} \cdot 2^2 \quad \therefore -8 \leq k \leq -2$$

である。

4

yz 平面において、 $D(0,2,6), E(0,6,3)$ より、直線 DE は、 $z = -\frac{3}{4}y + \frac{15}{2}$ であり、直線 DE と y 軸、 z 軸との交点はそれぞれ $Q(0,10,0), R(0,0,\frac{15}{2})$ である。

さらに、 xy 平面において $F(3,6,0)$ より、直線 QF は、 $y = -\frac{4}{3}x + 10$ であり、直線 QF と x 軸との交点は $P(\frac{15}{2}, 0, 0)$ であり、図の G は $G(6,2,0)$ となる。

また、 xz 平面において直線 PR は、 $z = -x + \frac{15}{2}$ であり、図の H, I は、 $H(6,0,\frac{3}{2}), I(\frac{3}{2}, 0, 6)$ である。

α による K の切り口を底面とし、 O を頂点とする錐体とは、 O を頂点とし、六角形 $DEFGHI$ を底面とする六角錐である。その錐体は四面体 $OPQR$ から3個の四面体 $OPGH, OQFE, ORID$ を除いた立体である。

四面体 $OPQR$ の体積は、

$$\frac{1}{3} \cdot \triangle OPQ \cdot OR = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{15}{2} \cdot 10 \cdot \frac{15}{2} = \frac{375}{4}$$

また、四面体 $OPGH, OQFE, ORID$ の体積はそれぞれ、

$$\frac{1}{3} \cdot \triangle OPG \cdot AH = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{15}{2} \cdot 2 \cdot \frac{3}{2} = \frac{15}{4}$$

$$\frac{1}{3} \cdot \triangle OQF \cdot BE = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 3 \cdot 3 = 15$$

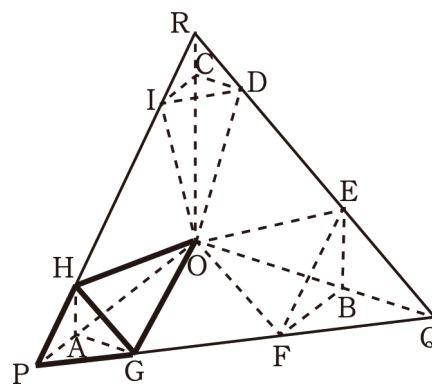
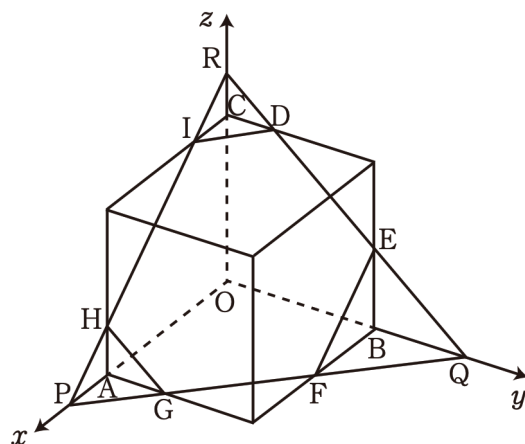
$$\frac{1}{3} \cdot \triangle ORI \cdot CD = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{15}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot 2 = \frac{15}{4}$$

となる。

以上から、求める体積は、

$$\frac{375}{4} - \left(\frac{15}{4} + 15 + \frac{15}{4} \right) = \frac{285}{4}$$

である。



…(答)

5

4本のひもの8個の端のうち、特定の1つを a とすると a と同じ組になる端の選び方は7通りである。
残った6個の端のうちの特定の1個を b とすると、 b と同じ組になる端の選び方は5通りである。残りの4つの端についても同様であるから、4つの組に分ける分け方の総数は、

$$7 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 1 = 105 \text{ 通り}$$

であり、これらは同様に確からしい。

● $N = 4$ のとき

4本のひもそれぞれにおいて、端どうしを同じ組にするから、組み分けの数は1通り。

以下、1本のひもの一方の端を a とすると、他方の端を a' と表すことにする。

● $N = 1$ のとき

4本のひもの8個の端のうち、特定の1つを p とする。 p と同じ組になる端の選び方は、 p と p' 以外の6通りである。 p と同じ組になる端を q とすると、 q' と同じ組になる端の選び方は、 p, p', q, q' 以外の4通りである。 q' と同じ組になる端を r とすると、 r' と同じ組になる端の選び方は、 p, p', q, q', r, r' 以外の2通りである。残り1つの端は p と結ぶことになる。よって、 $N = 1$ となる4つの組の分け方は、

$$6 \cdot 4 \cdot 2 = 48 \text{ 通り}$$

● $N = 2$ のとき

(i) 2本で1つの輪が2個 (ii) 3本で1つの輪, 1本で1つの輪
の2通りの場合がある。

(i) 組となるひもの選び方は ${}_3C_1$ 通りであり、それぞれの組でどの端を同じ組にするかで2通りずつあるので、4つの組の分け方は、

$${}_3C_1 \cdot 2^2 = 12 \text{ 通り}$$

(ii) 1本のひもの選び方は ${}_4C_1$ 通りであり、残りの3本で1つの輪をできる。3本のひもの輪について、どの端を同じ組にするかで $N = 1$ の場合と同様に考えて、

$${}_4C_1 \cdot 4 \cdot 2 = 32 \text{ 通り}$$

したがって、 $N = 2$ の場合は、 $12 + 32 = 44$ 通りである。

● $N = 3$ のとき

1本のひもでできる輪が2個、2本のひもでできる輪が1個の場合である。ひもの分け方は、1本のひもでできる2個の輪がどのひもであるかを考えて ${}_4C_2$ 通りある。2本のひもでできる端の組は、 $N = 1$ の場合と同様に2通りであるから、4つの組の分け方は、

$${}_4C_2 \cdot 2 = 12 \text{ 通り}$$

(1) 求める確率は、 $\frac{1}{105}$ である。…(答)

(2) 求める確率は、 $\frac{48}{105} = \frac{16}{35}$ …(答)

である。

(3) 求める N の期待値は、 $\frac{1 \cdot 48 + 2 \cdot 44 + 3 \cdot 12 + 4 \cdot 1}{105} = \frac{176}{105}$ …(答)

である。

(※) $N = 2$ の場合は、 N のとり値が1, 2, 3, 4のいずれかであることを示した後、余事象を利用して求めることもできる。