

2026年度 北海道大学 前期 数学 文系

1

(1) $f(x) = x^3 - 2x^2$ のとき,

$$f'(x) = 3x^2 - 4x = x(3x - 4)$$

であるから, $f(x)$ の増減は下表のようになる.

x	...	0	...	$\frac{4}{3}$	...
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	↗	0	↘	$-\frac{32}{27}$	↗

したがって, $f(x)$ は,

$$x = 0 \text{ のとき 極大値 } 0, x = \frac{4}{3} \text{ のとき 極小値 } -\frac{32}{27} \quad \dots\dots (\text{答})$$

をとる.

(2) (1) の増減表と $f(2) = 0$ より, $y = f(x)$ のグラフは右図のようになる.

よって, $0 \leq x \leq a$ ($a > 2$) における $f(x)$ の最大値は,

$$f(a) = a^3 - 2a^2 \quad \dots\dots (\text{答})$$

である.

(3) (2) のグラフより,

$$\begin{cases} 0 \leq x \leq 2 \text{ のとき} & f(x) \leq 0 \\ 2 \leq x \leq a \text{ のとき} & f(x) \geq 0 \end{cases}$$

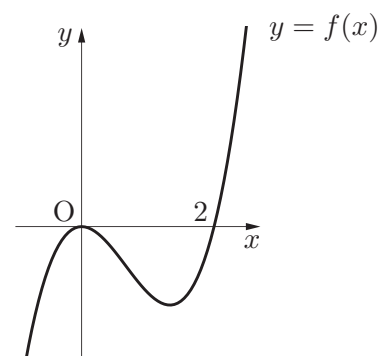
である. $F(x) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{2}{3}x^3$ とすると, $F'(x) = f(x)$ であることより,

$$\begin{aligned} \int_0^a |f(x)| dx &= \int_0^2 \{-f(x)\} dx + \int_2^a f(x) dx \\ &= -\left[F(x)\right]_0^2 + \left[F(x)\right]_2^a \\ &= -\{F(2) - F(0)\} + \{F(a) - F(2)\} \\ &= F(0) + F(a) - 2F(2) \end{aligned}$$

であり, $F(0) = 0$, $F(a) = \frac{1}{4}a^4 - \frac{2}{3}a^3$, $F(2) = -\frac{4}{3}$ であるから,

$$\int_0^a |f(x)| dx = \frac{1}{4}a^4 - \frac{2}{3}a^3 - 2 \cdot \left(-\frac{4}{3}\right) = \frac{1}{4}a^4 - \frac{2}{3}a^3 + \frac{8}{3} \quad \dots\dots (\text{答})$$

である.



2

$$a_1 = 4, a_{n+1}(a_n + 1) = 2 \cdots \cdots \textcircled{1} \ (n = 1, 2, 3, \cdots \cdots)$$

- (1) $b_n = \frac{1}{a_n + 2}$ とおくと, $a_n > 0$ より, $b_n > 0$ であり, $a_n = \frac{1}{b_n} - 2 \cdots \cdots \textcircled{2}$ となるから, これを $\textcircled{1}$ へ代入すると,

$$\left(\frac{1}{b_{n+1}} - 2 \right) \left(\frac{1}{b_n} - 1 \right) = 2$$

$$\therefore \frac{1}{b_{n+1}b_n} - \frac{1}{b_{n+1}} - \frac{2}{b_n} = 0$$

となる. これを整理して,

$$b_{n+1} = -\frac{1}{2}b_n + \frac{1}{2} \cdots \cdots (\text{答})$$

である.

- (2) (1) で求めた漸化式を変形すると,

$$b_{n+1} - \frac{1}{3} = -\frac{1}{2} \left(b_n - \frac{1}{3} \right)$$

となる.

ここで, $b_1 = \frac{1}{a_1 + 2} = \frac{1}{6}$ であり, 数列 $\left\{ b_n - \frac{1}{3} \right\}$ は, 初項 $b_1 - \frac{1}{3} = -\frac{1}{6}$,

公比 $-\frac{1}{2}$ の等比数列となるから,

$$b_n - \frac{1}{3} = -\frac{1}{6} \left(-\frac{1}{2} \right)^{n-1}$$

$$\therefore b_n = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \left(-\frac{1}{2} \right)^n = \frac{2^n + (-1)^n}{3 \cdot 2^n}$$

となる. よって, $\textcircled{2}$ より,

$$a_n = \frac{3 \cdot 2^n}{2^n + (-1)^n} - 2 = \frac{2^n - 2(-1)^n}{2^n + (-1)^n} \cdots \cdots (\text{答})$$

である.

3

(1) $\overrightarrow{AB} = (0, 0, 2)$, $\overrightarrow{AC} = (-1, -1, -2)$ より,

$$\overrightarrow{AH} = s(0, 0, 2) + t(-1, -1, -2) = (-t, -t, 2s - 2t)$$

であるから,

$$\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AH} = (-t, 1 - t, 2s - 2t)$$

である. よって, H の座標は,

$$(-t, 1 - t, 2s - 2t) \quad \dots\dots (\text{答})$$

である.

(2) 3点 A, B, C を通る平面と直線 OH が直交するとき, $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{OH}$ かつ $\overrightarrow{AC} \perp \overrightarrow{OH}$ であるから,

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{OH} = 0 \text{ かつ } \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{OH} = 0$$

である. (1) より, これは,

$$\begin{cases} 2(2s - 2t) = 0 \\ t - (1 - t) - 2(2s - 2t) = 0 \end{cases} \quad \therefore \begin{cases} s = t \\ 6t - 4s - 1 = 0 \end{cases}$$

となり, これを解くと,

$$s = t = \frac{1}{2}$$

となる. これらを (1) の結果に代入することにより, 求める H の座標は,

$$\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0\right) \quad \dots\dots (\text{答})$$

である.

(3) $\triangle ABC$ の面積は,

$$\frac{1}{2} \sqrt{|\overrightarrow{AB}|^2 |\overrightarrow{AC}|^2 - (\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC})^2} = \frac{1}{2} \sqrt{4 \cdot 6 - (-4)^2} = \sqrt{2}$$

であり, (2) のとき,

$$|\overrightarrow{OH}| = \sqrt{\left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 0^2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

である. よって, 四面体 OABC の体積は,

$$\frac{1}{3} \cdot \sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{3} \quad \dots\dots (\text{答})$$

である.

4

さいころを1回投げたとき、3の目が出る事象を A 、5の目が出る事象を B 、3と5以外の目が出る事象を C とする。
このとき、

$$P(A) = \frac{1}{6}, P(B) = \frac{1}{6}, P(C) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

である。

- (1) 3回試行したとき、最後の持ち点が4の倍数となるのは、 C が2回または3回起こるときである。したがって、求める確率は、

$${}_3C_2 \left(\frac{2}{3}\right)^2 \left(1 - \frac{2}{3}\right) + {}_3C_3 \left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{20}{27} \quad \dots\dots (答)$$

である。

- (2) 4回試行したとき、最後の持ち点が平方数となるのは、 A 、 B 、 C がいずれも偶数回ずつ起こるときで、

(i) 同じ事象が4回起こる

(ii) 同じ事象が2回ずつ起こる

の2つの場合がある。

(i) であるのは、 A 、 B 、 C のうちのひとつだけが4回起こるときで、確率はそれぞれ

$$\left(\frac{1}{6}\right)^4, \left(\frac{1}{6}\right)^4, \left(\frac{4}{6}\right)^4$$

である。したがって、(i)の確率は、

$$\left(\frac{1}{6}\right)^4 + \left(\frac{1}{6}\right)^4 + \left(\frac{4}{6}\right)^4 = \frac{43}{2^3 \cdot 3^3}$$

である。

(ii) であるのは、 A 、 B 、 C のうちの2つが2回ずつ起こるときで、

- A と B が2回ずつ起こる確率は ${}_4C_2 \left(\frac{1}{6}\right)^2 \left(\frac{1}{6}\right)^2$
- B と C が2回ずつ起こる確率は ${}_4C_2 \left(\frac{1}{6}\right)^2 \left(\frac{4}{6}\right)^2$
- C と A が2回ずつ起こる確率は ${}_4C_2 \left(\frac{4}{6}\right)^2 \left(\frac{1}{6}\right)^2$

である。したがって、(ii)の確率は、

$${}_4C_2 \left(\frac{1}{6}\right)^2 \left(\frac{1}{6}\right)^2 + {}_4C_2 \left(\frac{1}{6}\right)^2 \left(\frac{4}{6}\right)^2 + {}_4C_2 \left(\frac{4}{6}\right)^2 \left(\frac{1}{6}\right)^2 = \frac{33}{2^3 \cdot 3^3}$$

である。

以上より、求める確率は、

$$\frac{43}{2^3 \cdot 3^3} + \frac{33}{2^3 \cdot 3^3} = \frac{76}{2^3 \cdot 3^3} = \frac{19}{54} \quad \dots\dots (答)$$

である。