2026年度 北海道大学 前期 数学 理系

$\boxed{1}$

$$a_1=-8,\ a_{n+1}(a_n+1)=2\cdots\cdots① \quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$$

(1)　$a_n\neq -2\cdots\cdots$ ② が，$n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots$ で成り立つことを数学的帰納法により示す．

I．$n=1$ のとき，$a_1=-8\neq -2$ より，② は成り立つ．

Ⅱ．$n=k$ のとき，② が成り立つと仮定する．

① より，$a_{k+1}(a_k+1)=2$ であるから，$a_{k+1}=-2$ のとき，$a_k=-2$ であり，

「$a_{k+1}=-2$ であるならば $a_k=-2$ である」

は真である．すなわち，この対偶

「$a_k\neq -2$ であるならば $a_{k+1}\neq -2$ である」

もまた真である．よって，数学的帰納法の仮定より，② は，$n=k+1$ のときも成り立つ．

以上，I，Ⅱ より，② が $n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots$ で成り立つことが示された．

(証明終わり)

(2)　$b_n=\dfrac{1}{a_n+2}$ とおくと，$b_n\neq 0$ であり，$a_n=\dfrac{1}{b_n}-2\cdots\cdots$③ となるから，これを ① へ代入すると，

$$\left(\frac{1}{b_{n+1}}-2\right)\left(\frac{1}{b_n}-1\right)=2$$

$$\therefore\quad \frac{1}{b_{n+1}b_n}-\frac{1}{b_{n+1}}-\frac{2}{b_n}=0$$

となる．これを整理して，

$$b_{n+1}=-\frac{1}{2}b_n+\frac{1}{2} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

である．

(3)　(2) で求めた漸化式を変形すると，

$$b_{n+1}-\frac{1}{3}=-\frac{1}{2}\left(b_n-\frac{1}{3}\right)$$

となる．

ここで，$b_1 = \dfrac{1}{a_1+2} = -\dfrac{1}{6}$ であり，数列 $\left\{ b_n - \dfrac{1}{3} \right\}$ は，初項 $b_1 - \dfrac{1}{3} = -\dfrac{1}{2}$，公比 $-\dfrac{1}{2}$ の等比数列となるから，

$$b_n - \frac{1}{3} = -\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

$$\therefore \quad b_n = \frac{1}{3} + \left(-\frac{1}{2}\right)^n = \frac{2^n + 3(-1)^n}{3 \cdot 2^n}$$

となる．よって，③より，

$$a_n = \frac{3 \cdot 2^n}{2^n + 3(-1)^n} - 2 = \frac{2^n - 6(-1)^n}{2^n + 3(-1)^n} \qquad \cdots\cdots (\text{答})$$

である．

$\boxed{2}$

(1)
$$\begin{aligned}\int_0^x t\sin(x-t)\,dt &= [t\cos(x-t)]_0^x - \int_0^x \cos(x-t)\,dt\\ &= x + [\sin(x-t)]_0^x\\ &= x - \sin x \end{aligned}$$
$\cdots\cdots$(答)

である．

(2)
$$\begin{aligned} f(x) &= \int_0^x \left\{\sin^2(x-t) - \frac{1}{2}t\sin(x-t) + \frac{t^2}{16}\right\} dt\\ &= \int_0^x \left\{\frac{1-\cos 2(x-t)}{2} + \frac{t^2}{16}\right\} dt - \frac{1}{2}\int_0^x t\sin(x-t)\,dt\\ &= \left[\frac{1}{2}\left\{t + \frac{1}{2}\sin 2(x-t)\right\} + \frac{t^3}{48}\right]_0^x - \frac{1}{2}(x-\sin x) \qquad (\because \quad (1))\\ &= \frac{1}{2}x + \frac{x^3}{48} - \frac{1}{4}\sin 2x - \frac{1}{2}(x-\sin x)\\ &= \frac{x^3}{48} - \frac{1}{2}\sin x\cos x + \frac{1}{2}\sin x\\ &= \frac{x^3}{48} + \frac{1}{2}\sin x\,(1-\cos x) \end{aligned}$$
$\cdots\cdots$(答)

である．

(3) (2) より，$x \neq 0$ のとき，

$$\frac{f(x)}{x^3} = \frac{1}{48} + \frac{1}{2}\cdot\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{1-\cos x}{x^2}$$

であり，

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2} &= \lim_{x\to 0}\frac{(1-\cos x)(1+\cos x)}{x^2(1+\cos x)}\\ &= \lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2\cdot\frac{1}{1+\cos x}\\ &= 1^2\cdot\frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}\end{aligned}$$

であるから，

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x^3} = \frac{1}{48} + \frac{1}{2}\cdot 1\cdot\frac{1}{2} = \frac{13}{48}$$
$\cdots\cdots$(答)

である．

$\boxed{3}$

(1) α は $C:|z|=1$ 上の点であり，偏角が θ であるから，$\alpha=\cos\theta+i\sin\theta$ である．ここで，

$$\alpha+\overline{\alpha}=(\cos\theta+i\sin\theta)+(\cos\theta-i\sin\theta)=2\cos\theta$$

$$\alpha-\overline{\alpha}=(\cos\theta+i\sin\theta)-(\cos\theta-i\sin\theta)=2i\sin\theta$$

であり，$\dfrac{\pi}{2}<\theta<\pi$ であるから，$\cos\theta<0$ かつ $\sin\theta>0$ となることに注意すると，$|\alpha+\overline{\alpha}|=|\alpha-\overline{\alpha}|$ は，

$$\begin{aligned}&|2\cos\theta|=|2i\sin\theta|\\ \therefore\quad &-\cos\theta=\sin\theta\\ \therefore\quad &\tan\theta=-1\\ \therefore\quad &\theta=\frac{3}{4}\pi\end{aligned}$$

となる．したがって，

$$\alpha=\cos\frac{3}{4}\pi+i\sin\frac{3}{4}\pi=-\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}i \qquad \cdots\cdots(答)$$

である．

(2) $\beta^3=1$ であるから，$|\beta|=1$，すなわち，

$$\beta\overline{\beta}=1 \qquad \cdots\cdots①$$

である．

$$|z|=1 \qquad \cdots\cdots②$$
$$z\neq\beta \qquad \cdots\cdots③$$
$$w(z-\beta)=1 \qquad \cdots\cdots④$$

とし，点 w が描く図形を W とすると，

$$\begin{aligned}&w\in W\\ \Longleftrightarrow\ &② \text{ かつ } ③ \text{ かつ } ④\text{となる複素数 } z \text{ が存在する}\end{aligned} \qquad \cdots\cdots(*)$$

であり，$z=\beta$ のとき，④ は成り立たないから，④ ならば ③ である．したがって，

$$② \text{ かつ } ③ \text{ かつ } ④ \quad\Longleftrightarrow\quad ② \text{ かつ } ④$$

であり，$w=0$ のとき，④ は成り立たないから，④ ならば $w\neq0$ である．したがって，

$$② \text{ かつ } ④ \quad\Longleftrightarrow\quad \begin{cases}|z|=1\\ z=\dfrac{1}{w}+\beta\end{cases}$$

であるから，

$$\begin{aligned}(*)\quad&\Longleftrightarrow\quad \begin{cases}|z|=1\\ z=\dfrac{1}{w}+\beta\end{cases}\text{ となる複素数 } z \text{ が存在する}\\ &\Longleftrightarrow\quad \left|\frac{1}{w}+\beta\right|=1\\ &\Longleftrightarrow\quad |1+\beta w|=|w| \quad (\because\quad w=0\text{ のとき成り立たない})\\ &\Longleftrightarrow\quad \left|w+\overline{\beta}\right|=|w| \quad (\text{両辺に } \left|\overline{\beta}\right|(=1) \text{ を掛けて，①を用いた})\end{aligned}$$

である．以上の議論から，W は 2 点 $-\overline{\beta}$，0 を結ぶ線分の垂直二等分線である．ここで，

$$\begin{aligned} &\beta^3 = 1 \\ \therefore\ \ &(\beta-1)(\beta^2+\beta+1)=0 \\ \therefore\ \ &\beta = 1,\ \frac{-1\pm\sqrt{3}i}{2} \end{aligned}$$

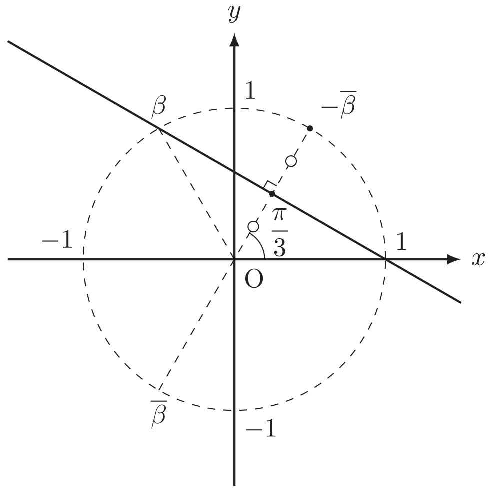
であり，β の虚部は正であるから，

$$\beta = \frac{-1+\sqrt{3}i}{2} = \cos\frac{2}{3}\pi + i\sin\frac{2}{3}\pi$$

である．よって，

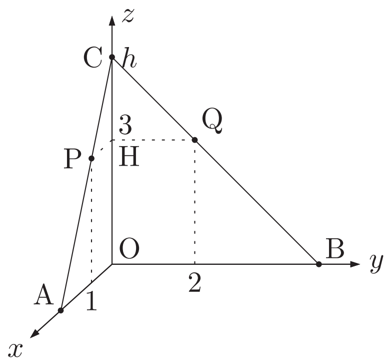
$$-\overline{\beta} = -\left\{\cos\left(-\frac{2}{3}\pi\right) + i\sin\left(-\frac{2}{3}\pi\right)\right\} = \cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}$$

であるから，W は下図の直線となる．



$\boxed{4}$

(1)　点 P から z 軸に垂線 PH を引く. HP $/\!/$ OA より,



$$\begin{aligned} \mathrm{OA}:\mathrm{HP} &= \mathrm{OC}:\mathrm{HC} \\ &= h : h-3 \end{aligned}$$

である.　よって,

$$\mathrm{OA} = \frac{h}{h-3}\mathrm{HP} = \frac{h}{h-3}$$

となるから, A の x 座標は,

$$\frac{h}{h-3} \qquad \cdots\cdots(答)$$

である.

(2)　(1) と同様にして, B の y 座標は,

$$\frac{2h}{h-3}$$

である. 3 点 O, A, B は xy 平面上にあり, 点 C は z 軸上にあるから, 四面体 OABC の体積 V は,

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{3}\cdot\frac{\mathrm{OA}\cdot\mathrm{OB}}{2}\cdot\mathrm{OC} \\ &= \frac{h^3}{3(h-3)^2} \qquad \cdots\cdots(答) \end{aligned}$$

である.

(3)
$$\frac{dV}{dh} = \frac{1}{3}\cdot\frac{3h^2\cdot(h-3)^2 - h^3\cdot 2(h-3)}{(h-3)^4} = \frac{h^2(h-9)}{3(h-3)^3}$$

である. $3(h-3)^3>0, h^2>0$ より, $\dfrac{dV}{dh}$ と $h-9$ の符号が一致することに注意すると, V の増減は次のようになる.

h	(3)	$\cdots$	9	$\cdots$
$\dfrac{dV}{dh}$		$-$	0	$+$
V		$\searrow$	$\dfrac{27}{4}$	$\nearrow$

よって, V は, $h=9$ のとき最小値をとり, その最小値は,

$$\frac{27}{4} \qquad \cdots\cdots(答)$$

である.

$\boxed{5}$

さいころを 1 回投げたとき，3 の目が出る事象を A，5 の目が出る事象を B，3 と 5 以外の目が出る事象を C とする．このとき，

$$P(A)=\frac{1}{6},\ P(B)=\frac{1}{6},\ P(C)=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$$

である．

(1) n 回試行したとき，最後の持ち点が 4 の倍数となるのは，n 回中少なくとも 2 回 C が起こるときである．これの余事象を考えることにより，求める確率は，

$$1-\left\{\left(\frac{1}{3}\right)^n+{}_n\mathrm{C}_1\cdot\frac{2}{3}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}\right\}=1-\frac{2n+1}{3^n} \qquad \cdots\cdots(答)$$

である．

(2) 持ち点がはじめて 15 以上となるまでに試行した回数を X とする．

1 回試行したときの持ち点の最大値が $5<15$ であるから，$X\geqq 2$ である．

2 回試行したとき，少なくとも 1 回 C が起こると持ち点は最大で $2\cdot 5=10<15$ となり，2 回とも A が起こると持ち点は $3\cdot 3=9<15$ となり，C が起こらず，かつ B が少なくとも 1 回起こると持ち点は最小で $3\cdot 5=15\geqq 15$ となる．すなわち，$X=2$ となるのは，2 回試行したとき，A と B が 1 回ずつ起こるか B が 2 回起こる場合である．したがって，2 回で終了する確率は，

$${}_2\mathrm{C}_1\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}+\left(\frac{1}{6}\right)^2=\frac{3}{36}=\frac{1}{12} \qquad \cdots\cdots①$$

である．

持ち点が 15 以上になっても試行をやめないとすると，4 回試行したときの持ち点の最小値が $2^4=16\geqq 15$ であるから，$X\leqq 4$ である．

3 回試行したとき，少なくとも 1 回 B が起こると持ち点は最小で $5\cdot 2\cdot 2=20\geqq 15$ となり，B が起こらず，かつ少なくとも 2 回 A が起こると持ち点は最小で $3\cdot 3\cdot 2=18\geqq 15$ となり，B が起こらず，かつ C が少なくとも 2 回起こると持ち点は最大で $2\cdot 2\cdot 3=12<15$ となる．すなわち，3 回試行したときは，A が 1 回と C が 2 回起こるか，C が 3 回起こる場合のみその時点での持ち点は 15 未満であり，いずれの場合も 4 回目を行うと持ち点は 15 以上となる．したがって，$X=4$ となる確率は，

$${}_3\mathrm{C}_1\cdot\frac{1}{6}\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^2+\left(\frac{2}{3}\right)^3=\frac{28}{54}=\frac{14}{27} \qquad \cdots\cdots②$$

である．

$X=3$ となる確率は，①，②より，

$$1-\left(\frac{1}{12}+\frac{14}{27}\right)=\frac{43}{108}$$

である．

以上より，求める期待値は，

$$2\cdot\frac{1}{12}+3\cdot\frac{43}{108}+4\cdot\frac{14}{27}=\frac{2\cdot 9+3\cdot 43+4\cdot 56}{108}=\frac{371}{108} \qquad \cdots\cdots(答)$$

である．