2026年度 神戸大学 前期 数学 理系

1.

組 $(a,\ b,\ c)$ は全部で $6^3 = 216$ 通り．

$f(x) = 2x^3 + ax^2 + 3x + b$ を $g(x) = x^2 + cx + 1$ で割ると，

$$f(x) = g(x)\cdot(2x + a - 2c) + (1 - ac + 2c^2)x + b - a + 2c$$

となり，

$$r(x) = (1 - ac + 2c^2)x + b - a + 2c$$

（1）「$r(x)$ が 0 となる」のは

$$\begin{cases} 1 - ac + 2c^2 = 0 & \cdots\cdots① \\ b - a + 2c = 0 & \cdots\cdots② \end{cases}$$

のときであり，

① より，$1 = c(a - 2c)$

$a,\ c$ は 1 以上 6 以下の整数なので，$\begin{cases} c = 1 \\ a - 2c = 1 \end{cases}$

よって，$c = 1,\ a = 3$ となり，このとき ② より

$$b = a - 2c = 3 - 2 = 1$$

となるので，$r(x)$ が 0 となるのは $(a,\ b,\ c) = (3,\ 1,\ 1)$ の 1 通り．

求める確率は

$$\mathbf{\frac{1}{216}} \cdots\cdots(\text{答})$$

（2）「$r(x)$ が 0 でなく，かつ $r(x)$ の次数が 0 となる」のは

$$\begin{cases} 1 - ac + 2c^2 = 0 & \cdots\cdots① \\ b - a + 2c \neq 0 & \cdots\cdots③ \end{cases}$$

のときであり，

（1）と同様にして，① より，$a = 3,\ c = 1$

このとき，③ より $b \neq 1$ となるので，$b = 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6$

よって，「$r(x)$ が 0 でなく，かつ $r(x)$ の次数が 0 である」のは

$(a,\ b,\ c) = (3,\ 2,\ 1),\ (3,\ 3,\ 1),\ (3,\ 4,\ 1),\ (3,\ 5,\ 1),\ (3,\ 6,\ 1)$ の 5 通り

あるので，求める確率は

$$\mathbf{\frac{5}{216}} \cdots\cdots(\text{答})$$

（3）$g(x) = 0$ の解は　$x = \dfrac{-c \pm \sqrt{c^2 - 4}}{2}$ であり，

c	1	2	3	4	5	6
$\dfrac{-c \pm \sqrt{c^2 - 4}}{2}$	$\dfrac{-1 \pm \sqrt{3}i}{2}$	-1	$\dfrac{-3 \pm \sqrt{5}}{2}$	$-2 \pm \sqrt{3}$	$\dfrac{-5 \pm \sqrt{21}}{2}$	$-3 \pm 2\sqrt{2}$

$\sqrt{2},\ \sqrt{3},\ \sqrt{5},\ \sqrt{21}$ は無理数であり，$\dfrac{-1 \pm \sqrt{3}i}{2}$ は虚数なので，「$g(x) = 0$ が有理数の解をもつ」のは

$c = 2$ の 1 通り

$a,\ b$ の値は任意なので，求める確率は

$\dfrac{6^2\cdot 1}{216}=\mathbf{\dfrac{1}{6}}$ ……(答)

（４）「$r(x)$ の次数が１となる」のは，

$1-ac+2c^2\neq 0$

のときであり，（１）より，$(a,\ c)\neq(3,\ 1)$ ……④

$\begin{cases} p=1-ac+2c^2 \\ q=b-a+2c \end{cases}$ とおくと，$r(x)=px+q$ であり，（④ より，$p\neq 0$）

「$g(x)$ が $r(x)$ で割り切れる」条件は，因数定理より　$g\left(-\dfrac{q}{p}\right)=0$

つまり $g(x)=0$ が $-\dfrac{q}{p}$ を解にもつときである．

（３）より，$g(x)=0$ が有理数の解をもつのは $c=2$ のときであり，その解について

$-\dfrac{q}{p}=-1$

$\therefore\ q=p$

$b-a+2c=1-ac+2c^2$

$c=2$ より，

$b-a+4=1-2a+8$

$\therefore\ a+b=5$

$a,\ b$ は１以上６以下の整数なので，$(a,\ b)=(1,\ 4),\ (2,\ 3),\ (3,\ 2),\ (4,\ 1)$

よって，「$r(x)$ の次数が１であり，かつ，$g(x)$ が $r(x)$ で割り切れる」のは

$(a,\ b,\ c)=(1,\ 4,\ 2),\ (2,\ 3,\ 2),\ (3,\ 2,\ 2),\ (4,\ 1,\ 2)$ の４通り（いずれも ④ を満たす）

となるので，求める確率は

$\dfrac{4}{216}=\mathbf{\dfrac{1}{54}}$ ……(答)

2．

（1）　$f(x)=\sin(\log x)\cos(\log x)$

より，

$$f'(x)=\cos(\log x)\cdot\frac{1}{x}\cdot\cos(\log x)+\sin(\log x)\cdot\left\{-\sin(\log x)\cdot\frac{1}{x}\right\}$$
$$=\frac{1}{x}\left\{\cos^2(\log x)-\sin^2(\log x)\right\}$$
$$=\frac{1}{x}\cos(2\log x)$$

$f'(x)=0$ とすると，

$\cos(2\log x)=0$

$1\leqq x\leqq e^{\pi}$ において，$0\leqq \log x\leqq \pi$ より $0\leqq 2\log x\leqq 2\pi$ であるから，

$$2\log x=\frac{\pi}{2},\ \frac{3}{2}\pi \qquad \therefore\ \ x=e^{\frac{\pi}{4}},\ e^{\frac{3}{4}\pi}$$

よって，$\log x$ が増加関数であることを考えると，$f(x)$ の増減表は次のようになる．

x	1	$\cdots$	$e^{\frac{\pi}{4}}$	$\cdots$	$e^{\frac{3}{4}\pi}$	$\cdots$	e^{π}
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$		↗		↘		↗	

ここで，

$$f(1)=0,\ f\left(e^{\frac{\pi}{4}}\right)=\sin\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{4}=\frac{1}{2},\ f\left(e^{\frac{3}{4}\pi}\right)=\sin\frac{3}{4}\pi\cos\frac{3}{4}\pi=-\frac{1}{2},\ f(e^{\pi})=0$$

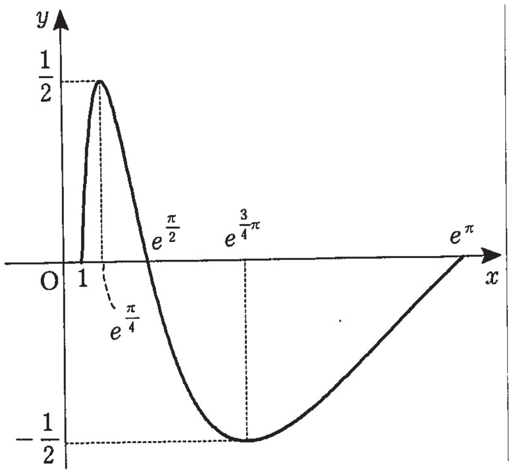
また，$f(x)=0$ とすると，

$\sin(\log x)=0$　または　$\cos(\log x)=0$

$\log x=0,\ \pi$　または　$\log x=\dfrac{\pi}{2}$

$\therefore\ \ x=1,\ e^{\pi},\ e^{\frac{\pi}{2}}$

以上より，$y=f(x)$ のグラフの概形は次のようになる．



…… (答)

（2）（1）より求める面積を S とすると，

$$S=\int_1^{e^{\frac{\pi}{2}}} f(x)\,dx=\int_1^{e^{\frac{\pi}{2}}} \sin(\log x)\cos(\log x)\,dx$$

ここで，$\log x = t$ とおくと $x=e^t$ であるから，

$\dfrac{dx}{dt}=e^t$，

x	$1 \to e^{\frac{\pi}{2}}$
t	$0 \to \frac{\pi}{2}$

よって，

$$S=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin t\cos t\cdot e^t\,dt=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2}e^t\sin 2t\,dt$$

$$=\left[\frac{1}{2}e^t\sin 2t\right]_0^{\frac{\pi}{2}}-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{2}e^t\cdot 2\cos 2t\,dt$$

$$=0-\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^t\cos 2t\,dt$$

$$=-\left\{\left[e^t\cos 2t\right]_0^{\frac{\pi}{2}}-\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^t\cdot(-2\sin 2t)\,dt\right\}$$

$$=-(-e^{\frac{\pi}{2}}-1)-\int_0^{\frac{\pi}{2}} 2e^t\sin 2t\,dt$$

$$=e^{\frac{\pi}{2}}+1-4S$$

$$\therefore\quad S=\boldsymbol{\frac{e^{\frac{\pi}{2}}+1}{5}}$$ …… (答)

3．

(1)　a，bを整数として，$z=a+bi$とすると，整数mが性質Pをみたすとき

$$m=|z^2|=|z|^2=a^2+b^2 \quad \cdots\cdots①$$

が成り立つ．これをみたすmで，$30<m<40$をみたすものを求める．

$a^2 \geqq 0$，$b^2 \geqq 0$より，$m \geqq a^2$，$m \geqq b^2$であるから，$m<40$より

$$a^2<40,\ b^2<40$$

である．

aに対する$|a|$とa^2の値は次の表のようになる．

$\lvert a\rvert$	0	1	2	3	4	5	6	7以上
a^2	0	1	4	9	16	25	36	49以上

b^2についても同様であるから，

$$30<m<40 \quad \text{すなわち} \quad 30<a^2+b^2<40$$

をみたすa^2，b^2の組は

$$(a^2,\ b^2)=(0,\ 36),\ (1,\ 36),\ (9,\ 25),\ (16,\ 16),\ (25,\ 9),\ (36,\ 1),\ (36,\ 0)$$

①より，求めるmの値は

$m=$ **32，34，36，37**　……**(答)**

(2)　性質Pをみたす2つの整数をk，lとすると，c，d，e，fを整数として

$$k=|z_1{}^2| \qquad \text{ただし，} z_1=c+di$$

$$l=|z_2{}^2| \qquad \text{ただし，} z_2=e+fi$$

をみたす複素数z_1，z_2が存在する．

このとき

$$kl=|z_1{}^2||z_2{}^2|=|z_1{}^2z_2{}^2|=|(z_1z_2)^2|$$

が成り立ち，

$$z_1z_2=(c+di)(e+fi)=ce-df+(cf+de)i$$

より，z_1z_2は実部と虚部が共に整数である複素数であるから，積klは性質Pをみたす．

(証明終わり)

(3)　すべての整数は，整数nを用いて$2n$，$2n+1$のいずれかで表せる．

$$(2n)^2=4n^2,\quad (2n+1)^2=4(n^2+n)+1$$

であり，n^2，n^2+nは整数であるから，平方数を4で割った余りは0または1．

したがって，①において，a^2，b^2はともに4で割った余りが0または1の整数であるから

a^2+b^2を4で割った余りは0，1，2のいずれか

すなわち

性質Pをみたす整数mを4で割った余りは0，1，2のいずれか

である．

よって，4で割った余りが3であるような整数は，性質Pをみたさない．

(証明終わり)

4.

(1)

$$\begin{aligned} g(x) &= \int_a^x f(t)\sin(x-t)dt \\ &= \int_a^x f(t)(\sin x\cos t - \cos x\sin t)dt \\ &= (\sin x)\int_a^x f(t)\cos t dt - (\cos x)\int_a^x f(t)\sin t dt \qquad \cdots\cdots ① \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g'(x) &= (\cos x)\int_a^x f(t)\cos t dt + (\sin x)f(x)\cos x + (\sin x)\int_a^x f(t)\sin t dt - (\cos x)f(x)\sin x \\ &= (\cos x)\int_a^x f(t)\cos t dt + (\sin x)\int_a^x f(t)\sin t dt \qquad \cdots\cdots ② \end{aligned}$$

よって

$$\begin{aligned} g'(a) &= (\cos a)\int_a^a f(t)\cos t dt + (\sin a)\int_a^a f(t)\sin t dt \\ &= \mathbf{0} \qquad \cdots\cdots\textbf{(答)} \end{aligned}$$

(2) ②より

$$\begin{aligned} g''(x) &= (-\sin x)\int_a^x f(t)\cos t dt + (\cos x)f(x)\cos x + (\cos x)\int_a^x f(t)\sin t dt + (\sin x)f(x)\sin x \\ &= f(x)(\cos^2 x + \sin^2 x) - \left\{(\sin x)\int_a^x f(t)\cos t dt - (\cos x)\int_a^x f(t)\sin t dt\right\} \end{aligned}$$

①より

$$g''(x) = \boldsymbol{f(x) - g(x)} \qquad \cdots\cdots\textbf{(答)}$$

(3) 条件P, Qを

$$P: \text{「}g(x) = \sin x - \sin^2 x\text{」},\quad Q: \text{「}f(x) = \sin^2 x - 2\cos^2 x \quad \text{かつ} \quad a = \frac{\pi}{2}\text{」}$$

と定める。

（$P \Rightarrow Q$ の証明）

$$\begin{aligned} g'(x) &= \cos x - 2\sin x\cos x = \cos x - \sin 2x \\ g''(x) &= -\sin x - 2\cos 2x \end{aligned}$$

(2)の結果より

$$\begin{aligned} f(x) &= g(x) + g''(x) \\ &= \sin x - \sin^2 x - \sin x - 2\cos 2x \\ &= -\sin^2 x - 2(\cos^2 x - \sin^2 x) \\ &= \sin^2 x - 2\cos^2 x \end{aligned}$$

また，①より $g(a) = 0$ であり，$0 \leqq a \leqq \pi$ より

$$\sin a - \sin^2 a = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \sin a = 0,\ 1 \quad \Leftrightarrow \quad a = 0,\ \frac{\pi}{2},\ \pi \qquad \cdots\cdots ③$$

(1)の結果より $g'(a) = 0$ であり

$$\cos a - 2\sin a\cos a = 0 \quad \Leftrightarrow \cos a = 0 \text{ または } \sin a = \frac{1}{2} \Leftrightarrow a = \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{6} \qquad \cdots\cdots ④$$

③かつ④より $a = \dfrac{\pi}{2}$ である。ゆえに $P \Rightarrow Q$ は成り立つ。

（$Q \Rightarrow P$ の証明）

①の 2 つの定積分について

$$\int_a^x f(t)\cos t dt = \int_{\frac{\pi}{2}}^x (\sin^2 t - 2\cos^2 t)\cos t dt$$
$$= \int_{\frac{\pi}{2}}^x \{\sin^2 t - 2(1-\sin^2 t)\}\cos t dt$$
$$= \int_{\frac{\pi}{2}}^x (3\sin^2 t - 2)\cos t dt$$
$$= \int_{\frac{\pi}{2}}^x (3\sin^2 t\cos t - 2\cos t) dt$$
$$= \Big[\sin^3 t - 2\sin t\Big]_{\frac{\pi}{2}}^x$$
$$= \sin^3 x - 2\sin x - (1-2)$$
$$= \sin^3 x - 2\sin x + 1 \qquad \cdots\cdots ⑤$$

$$\int_a^x f(t)\sin t dt = \int_{\frac{\pi}{2}}^x (\sin^2 t - 2\cos^2 t)\sin t dt$$
$$= \int_{\frac{\pi}{2}}^x (1-\cos^2 t - 2\cos^2 t)\sin t dt$$
$$= \int_{\frac{\pi}{2}}^x (1-3\cos^2 t)\sin t dt$$
$$= \int_{\frac{\pi}{2}}^x (\sin t - 3\cos^2 t\sin t) dt$$
$$= \Big[-\cos t + \cos^3 t\Big]_{\frac{\pi}{2}}^x$$
$$= -\cos x + \cos^3 x \qquad \cdots\cdots ⑥$$

①，⑤，⑥より

$$g(x) = (\sin x)(\sin^3 x - 2\sin x + 1) - (\cos x)(-\cos x + \cos^3 x)$$
$$= \sin^4 x - 2\sin^2 x + \sin x + \cos^2 x - \cos^4 x$$
$$= \sin^4 x - \cos^4 x - 2\sin^2 x + \sin x + \cos^2 x$$
$$= (\sin^2 x + \cos^2 x)(\sin^2 x - \cos^2 x) - 2\sin^2 x + \sin x + \cos^2 x$$
$$= \sin^2 x - \cos^2 x - 2\sin^2 x + \sin x + \cos^2 x$$
$$= \sin x - \sin^2 x$$

ゆえに $Q \Rightarrow P$ は成り立つ。

したがって，$P \Leftrightarrow Q$ であるから，条件「$g(x) = \sin x - \sin^2 x$」は，条件「$f(x) = \sin^2 x - 2\cos^2 x$ かつ $a = \dfrac{\pi}{2}$」であるための必要十分条件である。 **（証明終わり）**

5.

(1)

$$(1+r^2)\alpha^2-2\alpha+1=0$$

より,

$$\alpha=\frac{1\pm\sqrt{1-(1+r^2)}}{1+r^2}=\frac{1\pm|r|i}{1+r^2}$$

$r>0$ より, $\alpha=\dfrac{1}{1+r^2}\pm\dfrac{r}{1+r^2}i$ となる.

x, y を実数として $\alpha=x+yi$ とおくと,

$$x=\frac{1}{1+r^2}\quad\cdots\cdots①\quad, y=\pm\frac{r}{1+r^2}\quad\cdots\cdots②$$

$x\neq 0$ より,

$$\frac{y}{x}=\pm r$$

$$\therefore\ r=\pm\frac{y}{x}$$

となり, ① に代入して,

$$x=\frac{1}{1+\left(\pm\dfrac{y}{x}\right)^2}$$

$$x\left(1+\frac{y^2}{x^2}\right)=1$$

$$x^2+y^2=x$$

$$\therefore\ \left(x-\frac{1}{2}\right)^2+y^2=\frac{1}{4}$$

よって, 条件をみたす円 C が存在する. **(証明終わり)**

C の中心を表す複素数は $\boldsymbol{\dfrac{1}{2}}$, C の半径は $\boldsymbol{\dfrac{1}{2}}$ $\cdots\cdots$**(答)**

(2)

$r = te^{-t}$ $(t > 0)$ より, つねに $r > 0$ であり,

$$\frac{dr}{dt} = e^{-t} - te^{-t} = (1-t)e^{-t}$$

より, r の増減表は次のようになる.

t	(0)	$\cdots$	1	$\cdots$
$\frac{dr}{dt}$		$+$	0	$-$
r	(0)	$\nearrow$	e^{-1}	$\searrow$

より, r のとり得る値の範囲は $0 < r \leqq e^{-1}$ となる.

② より α の虚部は $\pm\dfrac{r}{1+r^2}$ であり, 辺 OB は実軸上にある.

$\triangle$OAB の面積を S とおくと,

$$S = \frac{1}{2}\mathrm{OB}\cdot\left|\pm\frac{r}{1+r^2}\right|$$

$\mathrm{OB} = 1$, $r > 0$ より,

$$S = \frac{r}{2(1+r^2)}$$

となる.

$$\frac{dS}{dr} = \frac{1+r^2-r\cdot 2r}{2(1+r^2)^2} = \frac{1-r^2}{2(1+r^2)^2}$$

$0 < r \leqq e^{-1} < 1$ であるから, つねに $\dfrac{dS}{dr} > 0$ であり, r に対して S は増加する.

よって, $\triangle$OAB の面積 S の最大値は, $r = e^{-1}$ のとき,

$$S = \frac{e^{-1}}{2(1+e^{-2})} = \boldsymbol{\frac{e}{2(e^2+1)}} \quad \cdots\cdots\textbf{(答)}$$

このとき, $t = \mathbf{1}$ $\cdots\cdots$**(答)**