

2026年度 神戸大学 前期 数学 文系

1.

(1) $\ell: y = ax + t$ は $P(-1, -1)$ を通るので

$$-1 = -a + t$$

$$a = t + 1$$

よって $\ell: y = (t+1)x + t$

ℓ が $C: y = x^3$ と相異なる 3 つの共有点をもつので

$$x^3 = (t+1)x + t$$

$$x^3 - (t+1)x - t = 0$$

$(x+1)(x^2 - x - t) = 0$ が相異なる 3 実解をもつ.

すなわち $x^2 - x - t = 0$ が -1 以外の相異なる 2 実解をもつ.

$f(x) = x^2 - x - t$ とし、 $f(x) = 0$ の判別式を D とすると

$$D = 1 + 4t > 0 \quad \text{かつ} \quad f(-1) = 2 - t \neq 0$$

すなわち

$$t > -\frac{1}{4} \quad \text{かつ} \quad t \neq 2$$

よって t のとりうる値の範囲は

$$-\frac{1}{4} < t < 2, 2 < t \quad \dots\dots \text{(答)}$$

(2) α, β は $f(x) = 0$ の相異なる 2 実解であるから、2 次方程式の解と係数の関係より

$$\alpha + \beta = 1 \quad \dots\dots \text{①}$$

$$\alpha\beta = -t \quad \dots\dots \text{② (答)}$$

よって

$$\alpha^2 + \beta^2 = (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta$$

$$\alpha^2 + \beta^2 = 1 + 2t \quad \dots\dots \text{③ (答)}$$

(3) $y = x^3$ において $y' = 3x^2$ より、 $A(\alpha, \alpha^3)$ における C の接線 ℓ_A は

$$y = 3\alpha^2(x - \alpha) + \alpha^3$$

$$y = 3\alpha^2x - 2\alpha^3$$

同様にして ℓ_B は

$$y = 3\beta^2x - 2\beta^3$$

ℓ_A と ℓ_B の交点を $Q(X, Y)$ とすると、 Q は ℓ_A, ℓ_B 上の点なので

$$Y = 3\alpha^2X - 2\alpha^3 \quad \dots\dots \text{④}$$

$$Y = 3\beta^2X - 2\beta^3 \quad \dots\dots \text{⑤}$$

ここで④ - ⑤より

$$3\alpha^2 X - 2\alpha^3 - 3\beta^2 X + 2\beta^3 = 0$$

$$(3\alpha^2 - 3\beta^2) X = 2\alpha^3 - 2\beta^3$$

$$3(\alpha - \beta)(\alpha + \beta)X = 2(\alpha - \beta)(\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2)$$

AとBは異なる点であるから $\alpha \neq \beta$ なので

$$3(\alpha + \beta)X = 2(\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2)$$

これと(2)の①, ②, ③より

$$3X = 2(1 + 2t - t)$$

$$t = \frac{3}{2}X - 1 \quad \dots\dots ⑥$$

また

$$\alpha^2 \times ⑤ : \alpha^2 Y = 3\alpha^2 \beta^2 X - 2\alpha^2 \beta^3$$

$$\beta^2 \times ④ : \beta^2 Y = 3\alpha^2 \beta^2 X - 2\alpha^3 \beta^2$$

辺々ひいて

$$\alpha^2 Y - \beta^2 Y = 2\alpha^3 \beta^2 - 2\alpha^2 \beta^3$$

$$(\alpha - \beta)(\alpha + \beta)Y = 2\alpha^2 \beta^2(\alpha - \beta)$$

$\alpha \neq \beta$ より

$$(\alpha + \beta)Y = 2\alpha^2 \beta^2$$

これと(2)の①, ②より

$$Y = 2t^2$$

これと⑥より

$$Y = 2\left(\frac{3}{2}X - 1\right)^2$$

$$= \frac{9}{2}\left(X - \frac{2}{3}\right)^2$$

ここで(1)の t の範囲 $-\frac{1}{4} < t < 2, 2 < t$ と⑥より

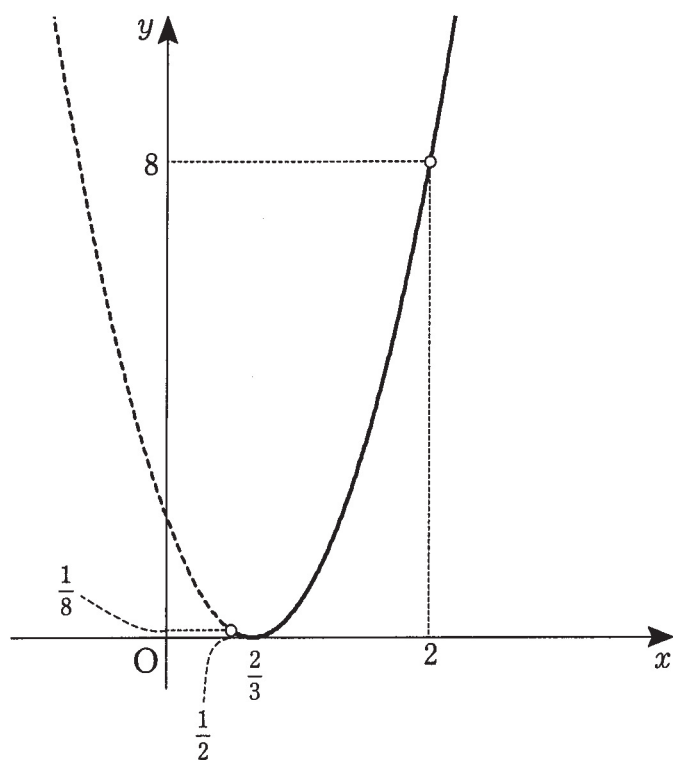
$$-\frac{1}{4} < \frac{3}{2}X - 1 < 2, 2 < \frac{3}{2}X - 1$$

$$\frac{1}{2} < X < 2, 2 < X$$

ゆえにQの軌跡は放物線

$$y = \frac{9}{2}\left(x - \frac{2}{3}\right)^2 \text{ の } \frac{1}{2} < x < 2, 2 < x \text{ をみたす部分} \quad \dots\dots (\text{答})$$

図示すると次のようになる.



..... (答)

2.

(a, b, c) の組は $6^3 = 216$ 通りあり、これらは同様に確からしい. $f(x)$ を $g(x)$ で割ると、

$$f(x) = g(x)(2x + a - 2c) + (2c^2 - ac + 1)x + (b - a + 2c)$$

であるから、

$$r(x) = (2c^2 - ac + 1)x + (b - a + 2c)$$

である.

(1) $r(x)$ が 0 である条件は

$$\begin{cases} 2c^2 - ac + 1 = 0 & \dots\dots\dots \textcircled{1} \\ b - a + 2c = 0 & \dots\dots\dots \textcircled{2} \end{cases}$$

である. ここで, $\textcircled{1} \iff c(a - 2c) = 1$

また, a, c は 1 以上 6 以下の整数であるから、

$$c = 1 \quad \text{かつ} \quad a - 2c = 1$$

すなわち, $(a, c) = (3, 1)$ であり, このとき, $\textcircled{2}$ より, $b = 1$ である.

以上より, $\textcircled{1}$ かつ $\textcircled{2}$ をみたす (a, b, c) の組は $(a, b, c) = (3, 1, 1)$ の 1 通りであるから、求める確率は

$$\frac{1}{216} \quad \dots\dots\dots (\text{答})$$

(2) $r(x)$ が 0 でなく, かつ, $r(x)$ の次数が 0 である条件は

$$2c^2 - ac + 1 = 0 \quad \text{かつ} \quad b - a + 2c \neq 0$$

であり, a, b, c は 1 以上 6 以下の整数であるから, (1) の過程より, (a, b, c) の組は

$$(a, c) = (3, 1) \quad \text{かつ} \quad b \neq 1$$

の 5 通りである. よって, 求める確率は

$$\frac{5}{216} \quad \dots\dots\dots (\text{答})$$

(3) $r(0) = (b - a) + 2c$ であり, $2c$ が偶数であるから, $r(0)$ が奇数である条件は

$$b - a \text{ が奇数}$$

である. すなわち、

$$(a \text{ が偶数かつ } b \text{ が奇数}) \quad \text{または} \quad (a \text{ が奇数かつ } b \text{ が偶数})$$

であり, このとき, それぞれに対して c は 6 通りずつあるから, 求める確率は

$$\frac{3 \cdot 3 \cdot 6 + 3 \cdot 3 \cdot 6}{6^3} = \frac{1}{2} \quad \dots\dots\dots (\text{答})$$

(4) $r(1) = (2c^2 - ac + 1) + r(0)$

ここで、 $2c^2$ は偶数であるから、 $r(0)$ が奇数であり、かつ、 $r(1)$ が偶数である条件は

$b - a$ が奇数かつ ac が偶数

である。すなわち、

(a が偶数かつ b が奇数かつ c は任意) または (a が奇数かつ b が偶数かつ c が偶数)

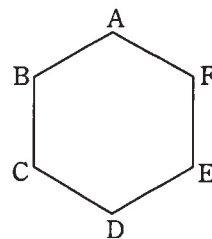
であるから、求める確率は

$$\frac{3 \cdot 3 \cdot 6 + 3 \cdot 3 \cdot 3}{216} = \frac{3}{8} \quad \dots\dots (答)$$

3.

- (1) 6点 A, B, C, D, E, F のうちどの3点も同一直線上にはないから,
 T に属する三角形と, 6点 A, B, C, D, E, F のうちの異なる3点の組は
 1対1に対応する. よって

$$n(T) = {}_6C_3 = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 20 \quad \dots\dots (\text{答})$$



- (2) 四角形全体の集合を R とする. R に属する四角形と, 6点 A, B, C, D, E, F の
 うちの異なる4点の組は1対1に対応する. よって

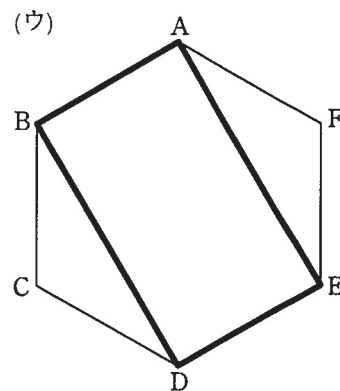
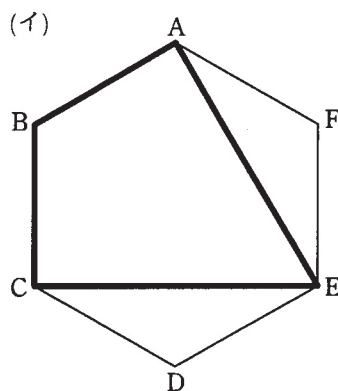
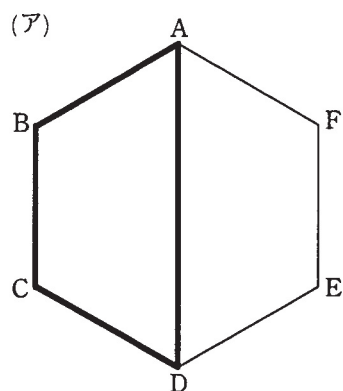
$$n(R) = {}_6C_4 = \frac{6 \cdot 5}{2 \cdot 1} = 15$$

次のように, 四角形の辺と正六角形の辺がどのように共有するかで場合分けして考える.

(ア) 3辺を共有する場合

(イ) 隣り合う2辺を共有する場合

(ウ) 隣り合わない2辺を共有する場合



(ア) をみたとす4点の組は

$\{A, B, C, D\}, \{B, C, D, E\}, \{C, D, E, F\}, \{D, E, F, A\}, \{E, F, A, B\}, \{F, A, B, C\}$
 の6通りあり, これらの組によって作られる四角形はすべて Q_1 に属する.

(イ) をみたとす4点の組は

$\{A, B, C, E\}, \{B, C, D, F\}, \{C, D, E, A\}, \{D, E, F, B\}, \{E, F, A, C\}, \{F, A, B, D\}$
 の6通りあり, これらの組によって作られる四角形はすべて Q_2 に属する.

(ウ) をみたとす4点の組は

$\{A, B, D, E\}, \{B, C, E, F\}, \{C, D, F, A\}$
 の3通りあり, これらの組によって作られる四角形はすべて Q_2 に属する.

$6+6+3=15$ であるから, R に属する四角形は(ア), (イ), (ウ) のいずれかの条件を満たす.

以上より

$$n(Q_1) = 6 \quad \dots\dots (\text{答})$$

$$n(Q_2) = 6+3=9 \quad \dots\dots (\text{答})$$

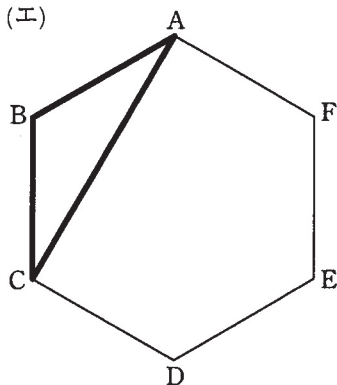
(3) 次のように、 X の辺と正六角形の辺がどのように共有するかで場合分けして考える。

(エ) 2 辺を共有する場合

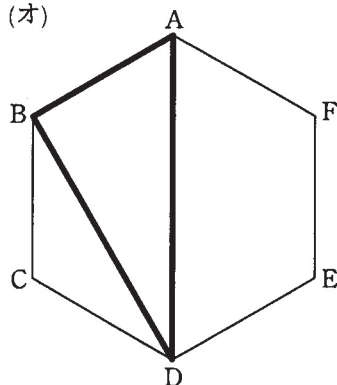
(オ) 1 辺を共有する場合

(カ) 辺を共有しない場合

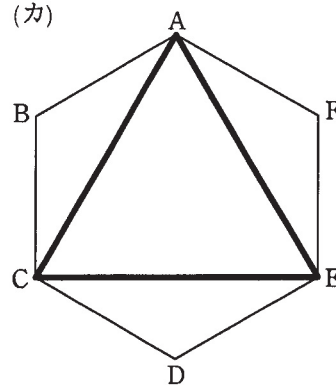
(エ)



(オ)



(カ)



(エ) のとき

X が三角形 ABC のとき、 X を含むような四角形を作る 4 点の組は

$\{A, B, C, D\}, \{A, B, C, E\}, \{A, B, C, F\}$

よって

$$n(S_1(X))=2, n(S_2(X))=1$$

X が他の三角形のときも同様である。

(オ) のとき

X が三角形 ABD のとき、 X を含むような四角形を作る 4 点の組は

$\{A, B, D, C\}, \{A, B, D, E\}, \{A, B, D, F\}$

よって

$$n(S_1(X))=1, n(S_2(X))=2$$

X が他の三角形のときも同様である。

(カ) のとき

X が三角形 ACE のとき、 X を含むような四角形を作る 4 点の組は

$\{A, C, E, B\}, \{A, C, E, D\}, \{A, C, E, F\}$

よって

$$n(S_1(X))=0, n(S_2(X))=3$$

X が他の三角形のときも同様である。

以上より

$$n(S_1(X)) = \begin{cases} 2 & (X \text{ が正三角形でない二等辺三角形のとき}) \\ 1 & (X \text{ が直角三角形のとき}) \\ 0 & (X \text{ が正三角形のとき}) \end{cases} \quad \dots\dots (\text{答})$$

$$n(S_2(X)) = \begin{cases} 1 & (X \text{ が正三角形でない二等辺三角形のとき}) \\ 2 & (X \text{ が直角三角形のとき}) \\ 3 & (X \text{ が正三角形のとき}) \end{cases} \quad \dots\dots (\text{答})$$