

2026年度 京都大学 前期 数学 理系

1

$$g(x) = x \log \frac{a}{x} \text{ とおくと}$$

$$g(x) = x(\log a - \log x)$$

$0 < x < 1$, $a > 1$ より, $g(x) > 0$ である.

$$f(x) = \frac{1}{\left(x \log \frac{a}{x}\right)^2} \text{ より, } f(x) = \{g(x)\}^{-2} \text{ であるから}$$

$$f'(x) = -2 \{g(x)\}^{-3} g'(x)$$

また

$$\begin{aligned} g'(x) &= (\log a - \log x) + x \left(-\frac{1}{x}\right) \\ &= \log \frac{a}{e} - \log x \end{aligned}$$

(i) $\frac{a}{e} \geq 1$ すなわち $a \geq e$ のとき

$g'(x) > 0$ であるから, $f'(x) < 0$

よって $f(x)$ は単調減少するから, $y = f(x)$ と $y = k$ のグラフの共有点がちょうど2個存在することはない.

(ii) $0 < \frac{a}{e} < 1$ すなわち $1 < a < e$ のとき

$f(x)$ の増減は次の通り.

x	(0)	...	$\frac{a}{e}$	...	(1)
$f'(x)$		-	0	+	
$f(x)$		$\searrow$	$\frac{e^2}{a^2}$	$\nearrow$	$\left(\frac{1}{(\log a)^2}\right)$

ここで, $\lim_{x \rightarrow +0} x \log x = 0$ より

$$\lim_{x \rightarrow +0} f(x) = \lim_{x \rightarrow +0} \frac{1}{(x \log a - x \log x)^2} = \infty$$

よって, $y = f(x)$ と $y = k$ のグラフの共有点がちょうど2個存在する条件は

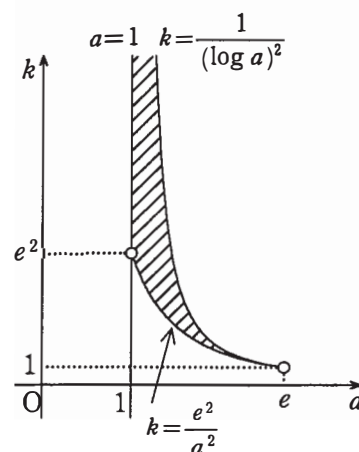
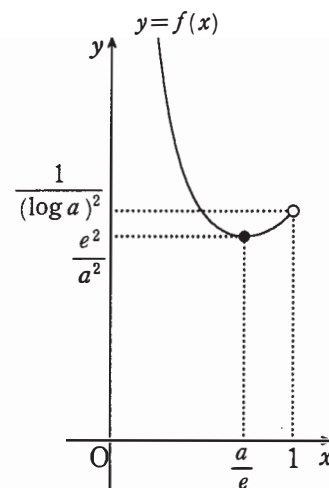
$$\frac{e^2}{a^2} < k < \frac{1}{(\log a)^2}$$

(i), (ii) より, 求める組 (a, k) の集合は

$$\left\{ 1 < a < e \text{ かつ } \frac{e^2}{a^2} < k < \frac{1}{(\log a)^2} \right\}$$

を満たすもので, 座標平面上に図示すると右図の斜線部となる.

ただし, 境界線を含まない.



2026年度 京都大学 前期 数学 理系

2

xyz 座標系を

$$O(0, 0, 0), \quad A(1, 0, 0), \quad B\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right), \quad C\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

となるように入れる．点 Q を辺 BC 上の点とし， $P(p, 0, 0)$ ， $Q\left(\frac{1}{2}, q, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ とおく．

ただし $0 \leq p \leq 1$ ， $-\frac{1}{2} \leq q \leq \frac{1}{2}$ である．

中心 P で半径 r の球面を S_P とする． S_P の方程式は，

$$(x-p)^2 + y^2 + z^2 = r^2$$

である． Q が S_P 上にある条件は，

$$\left(\frac{1}{2} - p\right)^2 + q^2 + \frac{1}{2} = r^2$$

$$\therefore q^2 = r^2 - \left(p - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{2} \quad \dots\dots\dots ①$$

である．

点 P が辺 OA 上のどこにあっても S_P が辺 BC と共有点をもたない

$$\iff (*) : \begin{cases} \text{任意の } p \ (0 \leq p \leq 1) \text{ に対して } q \text{ の方程式①が} \\ -\frac{1}{2} \leq q \leq \frac{1}{2} \text{ をみたす解をもたない} \end{cases}$$

$t = \left(p - \frac{1}{2}\right)^2$ とおくと t のとりうる値の範囲は $0 \leq t \leq \frac{1}{4}$ であり，①は，

$$q^2 = r^2 - t - \frac{1}{2} \quad \dots\dots\dots ②$$

となるから，

$$\begin{aligned} (*) &\iff \begin{cases} \text{任意の } 0 \leq t \leq \frac{1}{4} \text{ に対して } q \text{ の方程式②が} \\ -\frac{1}{2} \leq q \leq \frac{1}{2} \text{ をみたす解をもたない} \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} \text{任意の } 0 \leq t \leq \frac{1}{4} \text{ に対して} \\ r^2 - t - \frac{1}{2} < 0 \text{ または } r^2 - t - \frac{1}{2} > \frac{1}{4} \end{cases} \\ &\iff r^2 - 0 - \frac{1}{2} < 0 \text{ または } r^2 - \frac{1}{4} - \frac{1}{2} > \frac{1}{4} \\ &\iff 0 < r < \frac{1}{\sqrt{2}} \text{ または } r > 1 \quad \dots\dots\dots (\text{答}) \end{aligned}$$

2026年度 京都大学 前期 数学 理系

□ $P(x) = (x+1)^{2^{n+1}} - (x^2+1)^{2^n}$ とする.

$f(x) = x^2 + 2x + 1$, $g(x) = x^2 + 1$ とし, $f(x) = f$, $g(x) = g$ と略記する.

$$(x+1)^{2^{n+1}} = \{(x+1)^2\}^{2^n} = (x^2 + 2x + 1)^{2^n}$$

より

$$\begin{aligned} P(x) &= f^{2^n} - g^{2^n} \\ &= (f^{2^{n-1}} - g^{2^{n-1}})(f^{2^{n-1}} + g^{2^{n-1}}) \\ &\quad \vdots \\ &= (f - g)(f + g)(f^2 + g^2) \cdots (f^{2^{n-1}} + g^{2^{n-1}}) \end{aligned}$$

$f = g + 2x$ より, 自然数 l に対して

$$\begin{aligned} f^l + g^l &= (g + 2x)^l + g^l \\ &= g^l + \sum_{r=0}^l {}_l C_r g^{l-r} (2x)^r \\ &= 2g^l + 2 \sum_{r=1}^l 2^{r-1} {}_l C_r g^{l-r} x^r \end{aligned}$$

これはすべての係数が偶数である多項式である. これを $2Q_l(x)$ とする.

$$\begin{aligned} P(x) &= 2x \cdot 2Q_1(x) \cdot 2Q_2(x) \cdots 2Q_{2^n-1}(x) \\ &= 2^{n+1} x Q_1(x) Q_2(x) \cdots Q_{2^n-1}(x) \end{aligned}$$

$xQ_1(x)Q_2(x)\cdots Q_{2^n-1}(x)$ は整数係数の多項式であるから, $P(x)$ の係数はすべて整数であり, かつ 2^{n+1} で割り切れる.

ここで, $P(x)$ の x の係数は

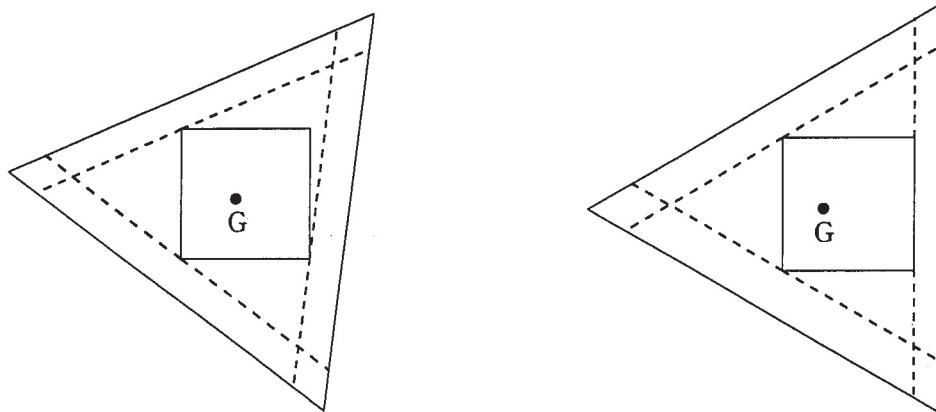
$$2^{n+1} C_1 = 2^{n+1}$$

である. よって $P(x)$ のすべての係数が 2^m で割り切れる整数 m の最大値は $n+1$ である. (証明終わり)

2026年度 京都大学 前期 数学 理系

4

(*) を満たす正三角形で、正方形の4頂点のうち正三角形の各辺上にあるものが2点以下であるとき、正三角形の各辺を正三角形の重心 G に近づくように平行移動して正三角形を作り直すことで、正三角形の各辺上に少なくとも1つの正方形の頂点があるようにすることができる。



このようにして得られる正三角形 PQR の1辺の長さの最小値を求めればよい。

図のように正方形の4頂点を A, B, C, D とする。

$\angle BAQ = \theta$ とすると、図のように角が定まるので、 θ が満たすべき条件は

$$90^\circ - \theta \geq 0^\circ \text{ かつ } \theta - 60^\circ \geq 0^\circ$$

$$\therefore 60^\circ \leq \theta \leq 90^\circ$$

$\triangle ABQ$ で正弦定理より

$$\frac{BQ}{\sin \theta} = \frac{1}{\sin 60^\circ}$$

$$\therefore BQ = \frac{2}{\sqrt{3}} \sin \theta$$

$\triangle BCR$ で正弦定理より

$$\frac{BR}{\sin(150^\circ - \theta)} = \frac{1}{\sin 60^\circ}$$

$$\therefore BR = \frac{2}{\sqrt{3}} \sin(150^\circ - \theta)$$

正三角形の1辺の長さは

$$QR = BQ + BR$$

$$= \frac{2}{\sqrt{3}} \{ \sin \theta + \sin(150^\circ - \theta) \}$$

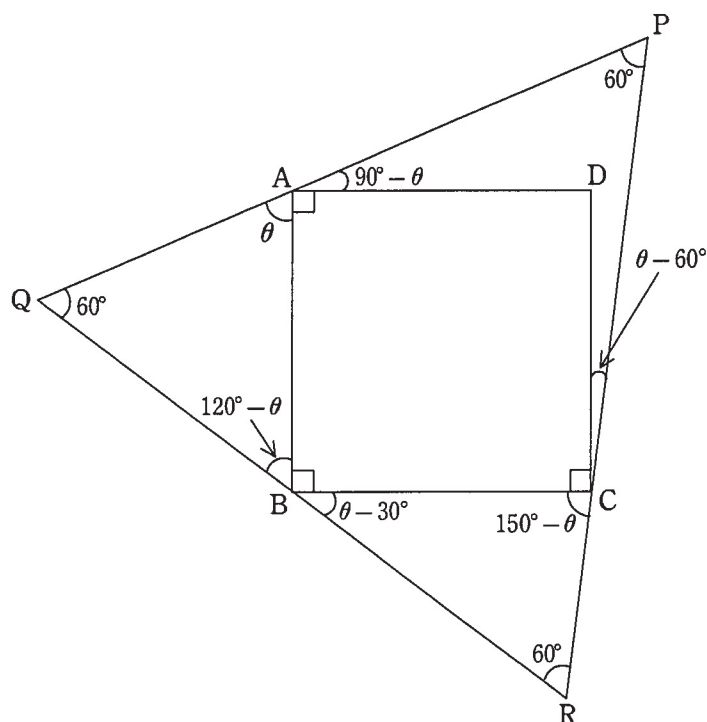
$$= \frac{4}{\sqrt{3}} \sin 75^\circ \cos(\theta - 75^\circ)$$

$-15^\circ \leq \theta - 75^\circ \leq 15^\circ$ より、 QR は

$\theta - 75^\circ = \pm 15^\circ$ すなわち $\theta = 60^\circ, 90^\circ$ のとき、

$$\text{最小値 } \frac{2}{\sqrt{3}} (\sin 60^\circ + \sin 90^\circ) = 1 + \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{3 + 2\sqrt{3}}{3} \dots\dots (\text{答})$$

をとる。



2026年度 京都大学 前期 数学 理系

5

$\sin(-x+a) = -\sin(x-a)$ より $y = \sin(x+a)$ と $y = \sin(x-a)$ は原点に関して対称だから、求める体積を V として、 $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ のときを考える。

このとき、 $0 < a < \pi$ より

$$\sin(x+a) - \sin(x-a) = 2\sin a \cos x \geq 0$$

$$\therefore \sin(x+a) \geq \sin(x-a)$$

この等号は $x = \frac{\pi}{2}$ のときのみ成り立つ。

(i) $0 < a \leq \frac{\pi}{2}$ のとき

$$F(x) = \frac{1}{2} \left\{ x - \frac{1}{2} \sin 2(x+a) \right\}$$

$$G(x) = \frac{1}{2} \left\{ x - \frac{1}{2} \sin 2(x-a) \right\}$$

とおくと

$$F'(x) = \frac{1}{2} \{ 1 - \cos 2(x+a) \} = \sin^2(x+a)$$

$$G'(x) = \frac{1}{2} \{ 1 - \cos 2(x-a) \} = \sin^2(x-a)$$

であり

$$F(0) = -\frac{1}{4} \sin 2a, \quad F\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{4}(\pi + \sin 2a)$$

$$G(a) = \frac{a}{2}, \quad G\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{4}(\pi - \sin 2a)$$

だから

$$\begin{aligned} \frac{V}{2} &= \pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} F'(x) dx - \pi \int_a^{\frac{\pi}{2}} G'(x) dx \\ &= \pi \left[F(x) \right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \pi \left[G(x) \right]_a^{\frac{\pi}{2}} \\ &= \pi \left\{ F\left(\frac{\pi}{2}\right) - F(0) - G\left(\frac{\pi}{2}\right) + G(a) \right\} \\ &= \pi \left\{ \frac{1}{4}(\pi + \sin 2a) + \frac{1}{4} \sin 2a - \frac{1}{4}(\pi - \sin 2a) + \frac{a}{2} \right\} \\ &= \pi \left(\frac{a}{2} + \frac{3}{4} \sin 2a \right) \\ \therefore V &= \pi \left(a + \frac{3}{2} \sin 2a \right) \end{aligned}$$

(ii) $\frac{\pi}{2} \leq a < \pi$ のとき

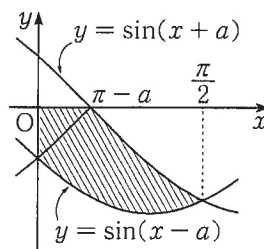
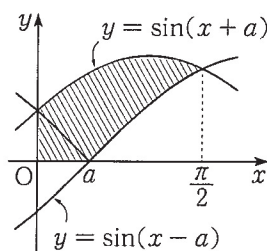
(i) の結果で a を $\pi - a$ に変えて

$$V = \pi \left\{ (\pi - a) + \frac{3}{2} \sin 2(\pi - a) \right\}$$

$$= \pi \left(\pi - a - \frac{3}{2} \sin 2a \right)$$

以上のことから

$$V = \begin{cases} \pi \left(a + \frac{3}{2} \sin 2a \right) & (0 < a \leq \frac{\pi}{2}) \\ \pi \left(\pi - a - \frac{3}{2} \sin 2a \right) & (\frac{\pi}{2} \leq a < \pi) \end{cases} \dots\dots(\text{答})$$



2026年度 京都大学 前期 数学 理系

6

$X = k$ ($k = 3, 4, \dots, n$) となる確率を $P(k)$ とする.

$X = k$ となるのは, k が書かれた札と 1 から $k-1$ までの番号が書かれた札から 2 枚を取り出すときなので,

$$\begin{aligned} P(k) &= \frac{{}_1C_1 \cdot {}_{k-1}C_2}{{}_nC_3} \\ &= \frac{1 \cdot \frac{(k-1)(k-2)}{2}}{\frac{n(n-1)(n-2)}{6}} \\ &= \frac{3(k-1)(k-2)}{n(n-1)(n-2)} \end{aligned}$$

よって, X の期待値 $E(X)$ は,

$$\begin{aligned} E(X) &= \sum_{k=3}^n kP(k) \\ &= \sum_{k=3}^n \frac{3k(k-1)(k-2)}{n(n-1)(n-2)} \\ &= \frac{3}{4n(n-1)(n-2)} \sum_{k=3}^n \{(k+1)k(k-1)(k-2) - k(k-1)(k-2)(k-3)\} \\ &= \frac{3(n+1)n(n-1)(n-2)}{4n(n-1)(n-2)} \\ &= \frac{3(n+1)}{4} \dots\dots\dots (\text{答}) \end{aligned}$$

(別解)

$$\begin{aligned} E(X) &= \sum_{k=3}^n kP(k) \\ &= \sum_{k=3}^n \frac{3k(k-1)(k-2)}{n(n-1)(n-2)} \\ &= \sum_{k=1}^n \frac{3k(k-1)(k-2)}{n(n-1)(n-2)} \\ &= \frac{3}{n(n-1)(n-2)} \sum_{k=1}^n k(k-1)(k-2) \\ &= \frac{3}{n(n-1)(n-2)} \sum_{k=1}^n (k^3 - 3k^2 + 2k) \\ &= \frac{3}{n(n-1)(n-2)} \left\{ \frac{n^2(n+1)^2}{4} - 3 \cdot \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + 2 \cdot \frac{n(n+1)}{2} \right\} \\ &= \frac{3}{n(n-1)(n-2)} \cdot \frac{n(n+1)}{4} \{n(n+1) - 2(2n+1) + 4\} \\ &= \frac{3(n+1)}{4(n-1)(n-2)} (n^2 - 3n + 2) \\ &= \frac{3(n+1)}{4(n-1)(n-2)} (n-1)(n-2) \\ &= \frac{3(n+1)}{4} \dots\dots\dots (\text{答}) \end{aligned}$$