

2026年度 京都大学 前期 数学 文系

1

$P(s, t)$ とおくと、点 P は C 上で第 1 象限にあるから

$$s^2 + t^2 = 1 \quad \dots\dots ①$$

$$0 < s < 1$$

$$0 < t < 1 \quad \dots\dots ②$$

l の方程式は

$$sx + ty = 1 \quad \dots\dots ③$$

$y = 2 - x^2$ を ③ に代入して

$$sx + t(2 - x^2) = 1$$

$$\therefore tx^2 - sx - 2t + 1 = 0 \quad \dots\dots ④$$

② より $t \neq 0$ であるから、④ は x の 2 次方程式である。

④ の判別式を D とすると

$$D = s^2 - 4t(-2t + 1)$$

① より $s^2 = 1 - t^2$ であるから

$$D = 7t^2 - 4t + 1$$

$$= 7\left(t - \frac{2}{7}\right)^2 + \frac{3}{7} > 0$$

よって、④ は異なる 2 つの実数解をもつ。

この 2 解を α, β ($\alpha < \beta$) とすると、右図より

$$\begin{aligned} S &= \int_{\alpha}^{\beta} \left\{ (2 - x^2) - \left(-\frac{s}{t}x + \frac{1}{t} \right) \right\} dx \\ &= -\int_{\alpha}^{\beta} (x - \alpha)(x - \beta) dx \\ &= \frac{1}{6}(\beta - \alpha)^3 \end{aligned}$$

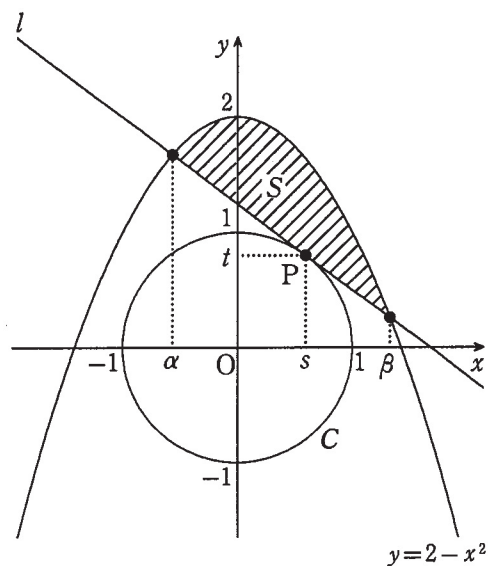
④ を解くと $x = \frac{s \pm \sqrt{D}}{2t}$ であるから

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{6} \left(\frac{s + \sqrt{D}}{2t} - \frac{s - \sqrt{D}}{2t} \right)^3 \\ &= \frac{1}{6} \left(\frac{\sqrt{D}}{t} \right)^3 \\ &= \frac{1}{6} \left(\sqrt{\frac{7t^2 - 4t + 1}{t^2}} \right)^3 \\ &= \frac{1}{6} \left(\sqrt{7 - \frac{4}{t} + \frac{1}{t^2}} \right)^3 \\ &= \frac{1}{6} \left(\sqrt{\left(\frac{1}{t} - 2 \right)^2 + 3} \right)^3 \end{aligned}$$

② より $\frac{1}{t} > 1$ であるから、 S は

$$\frac{1}{t} = 2 \text{ すなわち } t = \frac{1}{2} \text{ のとき, 最小値 } \frac{1}{6}(\sqrt{3})^3 = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \dots\dots (\text{答})$$

をとる。



2

xyz 座標系を

$$O(0, 0, 0), \quad A(1, 0, 0), \quad B\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right), \quad C\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

となるように入れる．点 Q を辺 BC 上の点とし， $P(p, 0, 0)$ ， $Q\left(\frac{1}{2}, q, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ とおく．

ただし $0 \leq p \leq 1$ ， $-\frac{1}{2} \leq q \leq \frac{1}{2}$ である．

中心 P で半径 r の球面を S_P とする． S_P の方程式は，

$$(x-p)^2 + y^2 + z^2 = r^2$$

である． Q が S_P 上にある条件は，

$$\left(\frac{1}{2} - p\right)^2 + q^2 + \frac{1}{2} = r^2$$

$$\therefore q^2 = r^2 - \left(p - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{2} \quad \dots\dots\dots ①$$

である．

点 P が辺 OA 上のどこにあっても S_P が辺 BC と共有点をもたない

$$\iff (*) : \begin{cases} \text{任意の } p \ (0 \leq p \leq 1) \text{ に対して } q \text{ の方程式①が} \\ -\frac{1}{2} \leq q \leq \frac{1}{2} \text{ をみたす解をもたない} \end{cases}$$

$t = \left(p - \frac{1}{2}\right)^2$ とおくと t のとりうる値の範囲は $0 \leq t \leq \frac{1}{4}$ であり，①は，

$$q^2 = r^2 - t - \frac{1}{2} \quad \dots\dots\dots ②$$

となるから，

$$\begin{aligned} (*) &\iff \begin{cases} \text{任意の } 0 \leq t \leq \frac{1}{4} \text{ に対して } q \text{ の方程式②が} \\ -\frac{1}{2} \leq q \leq \frac{1}{2} \text{ をみたす解をもたない} \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} \text{任意の } 0 \leq t \leq \frac{1}{4} \text{ に対して} \\ r^2 - t - \frac{1}{2} < 0 \text{ または } r^2 - t - \frac{1}{2} > \frac{1}{4} \end{cases} \\ &\iff r^2 - 0 - \frac{1}{2} < 0 \text{ または } r^2 - \frac{1}{4} - \frac{1}{2} > \frac{1}{4} \\ &\iff 0 < r < \frac{1}{\sqrt{2}} \text{ または } r > 1 \quad \dots\dots\dots (\text{答}) \end{aligned}$$

3

(1) m が 0 以上の整数のとき, $3m + p \cdot 0$ は 0 以上の 3 の倍数をすべて表す.

ここで, p は 3 より大きい素数より 3 の倍数ではないから, 正の整数 n を用いて $p = 3n + 1$ または $p = 3n + 2$ と表される.

[1] $p = 3n + 1$ のとき

$3m + p \cdot 1 = 3m + (3n + 1) \cdot 1 = 3(m + n) + 1$ より, $3m + p \cdot 1$ を 3 で割った余りは 1 で,

$3m + p \cdot 1 \geq p$ であるから, $3m + p \cdot 1$ は p 以上の 3 で割ると 1 余る整数をすべて表す.

$3m + p \cdot 2 = 3m + 2(3n + 1) = 3(m + 2n) + 2$ より, $3m + p \cdot 2$ を 3 で割った余りは 2 で,

$3m + p \cdot 2 \geq 2p$ であるから, $3m + p \cdot 2$ は $2p$ 以上の 3 で割ると 2 余る整数をすべて表す.

[2] $p = 3n + 2$ のとき

$3m + p \cdot 1 = 3m + (3n + 2) \cdot 1 = 3(m + n) + 2$ より, $3m + p \cdot 1$ を 3 で割った余りは 2 で,

$3m + p \cdot 1 \geq p$ であるから, $3m + p \cdot 1$ は p 以上の 3 で割ると 2 余る整数をすべて表す.

$3m + p \cdot 2 = 3m + 2(3n + 2) = 3(m + 2n + 1) + 1$ より, $3m + p \cdot 2$ を 3 で割った余りは 1 で,

$3m + p \cdot 2 \geq 2p$ であるから, $3m + p \cdot 2$ は $2p$ 以上の 3 で割ると 1 余る整数をすべて表す.

以上より, $2p$ 以上の整数 N は, 0 以上の整数 m と 0 以上の整数 k を用いて

$$N = 3m + pk$$

と表すことができる.

(証明終わり)

(2) (1) より $2p$ 以上の整数 N は, 0 以上の整数 m と 0 以上の整数 k を用いて $N = 3m + pk$ と表すことができるから, 0 以上 $2p - 1$ 以下の整数 N の中で

条件 (A) 「0 以上の整数 m と 0 以上の整数 k を用いて, $N = 3m + pk$ と表すことができない」を満たすものを考える.

N が 0 以上 $2p - 1$ 以下のとき $k = 0, 1$

(i) $k = 0$ のとき

$N = 3m$ より, 0 以上 $2p - 1$ 以下の 3 の倍数はすべて表せる.

(ii) $k = 1$ のとき

$N = 3m + p \geq p$ であるから

p を 3 で割った余りが 1 のとき, p 以上 $2p - 1$ 以下の 3 で割ると 1 余る整数はすべて表せる.

p を 3 で割った余りが 2 のとき, p 以上 $2p - 1$ 以下の 3 で割ると 2 余る整数はすべて表せる.

(i), (ii) より

[1] p を 3 で割った余りが 1 のとき

条件 (A) を満たすものは, 0 以上 $p - 1$ 以下の 3 の倍数以外と, p 以上 $2p - 1$ 以下の 3 で割ると

2 余る整数であり, そのような整数の個数は $\left\{ (p - 1) - \frac{p - 1}{3} \right\} + \frac{p - 1}{3} = p - 1$

[2] p を 3 で割った余りが 2 のとき

条件 (A) を満たすものは, 0 以上 $p - 1$ 以下の 3 の倍数以外と, p 以上 $2p - 1$ 以下の 3 で割ると

1 余る整数であり, そのような整数の個数は $\left\{ (p - 1) - \frac{p - 2}{3} \right\} + \frac{p - 2}{3} = p - 1$

以上から, 求める整数 N の個数は $p - 1$

..... (答)

4

(1) $[\log_3 k] = l$ (l は 0 以上の整数) となるための条件は

$$l \leq \log_3 k < l+1$$

$$3^l \leq k < 3^{l+1}$$

$$k = 3^l, 3^l+1, 3^l+2, \dots, 3^{l+1}-1 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

であるから

$$[\log_3 k] = 0 \text{ となる } k \text{ の値は, } k = 1, 2$$

$$[\log_3 k] = 1 \text{ となる } k \text{ の値は, } k = 3, 4, 5, \dots, 8$$

$$[\log_3 k] = 2 \text{ となる } k \text{ の値は, } k = 9, 10, 11, \dots, 26$$

$$\therefore a_{26} = \sum_{k=1}^{26} [\log_3 k] = 0 \cdot 2 + 1 \cdot 6 + 2 \cdot 18 = 42 \quad \dots\dots (\text{答})$$

(2) ①より, $[\log_3 k] = l$ となるような自然数 k の個数は

$$(3^{l+1}-1) - 3^l + 1 = 2 \cdot 3^l$$

である.

[ア] $N=1$ のとき

$$a_m = \sum_{k=1}^2 [\log_3 k] = 0$$

[イ] $N \geq 2$ のとき

$$a_m = \sum_{k=1}^m [\log_3 k] = \sum_{l=0}^{N-1} 2 \cdot 3^l \cdot l = \sum_{l=1}^{N-1} 2l \cdot 3^l$$

ゆえに

$$\begin{array}{rcl} 3a_m & = & 2 \cdot 3^2 + \dots + 2(N-2) \cdot 3^{N-1} + 2(N-1) \cdot 3^N \\ -) & a_m & = 2 \cdot 3^1 + 4 \cdot 3^2 + \dots + 2(N-1) \cdot 3^{N-1} \\ \hline 2a_m & = & -2(3^1 + 3^2 + \dots + 3^{N-1}) + 2(N-1) \cdot 3^N \\ 2a_m & = & -2 \cdot \frac{3(3^{N-1}-1)}{3-1} + 2(N-1) \cdot 3^N \end{array}$$

整理して

$$a_m = \frac{(2N-3) \cdot 3^N + 3}{2} \quad (N \geq 2)$$

[ア] [イ] から

$$a_m = \frac{(2N-3) \cdot 3^N + 3}{2} \quad (N \geq 1) \quad \dots\dots (\text{答})$$

5

$X = k$ ($k = 3, 4, \dots, n$) となる確率を $P(k)$ とする.

$X = k$ となるのは、 k が書かれた札と 1 から $k - 1$ までの番号が書かれた札から 2 枚を取り出すときなので、

$$\begin{aligned} P(k) &= \frac{{}_1C_1 \cdot {}_{k-1}C_2}{{}_nC_3} \\ &= \frac{1 \cdot \frac{(k-1)(k-2)}{2}}{\frac{n(n-1)(n-2)}{6}} \\ &= \frac{3(k-1)(k-2)}{n(n-1)(n-2)} \end{aligned}$$

よって、 X の期待値 $E(X)$ は、

$$\begin{aligned} E(X) &= \sum_{k=3}^n kP(k) \\ &= \sum_{k=3}^n \frac{3k(k-1)(k-2)}{n(n-1)(n-2)} \\ &= \frac{3}{4n(n-1)(n-2)} \sum_{k=3}^n \{(k+1)k(k-1)(k-2) - k(k-1)(k-2)(k-3)\} \\ &= \frac{3(n+1)n(n-1)(n-2)}{4n(n-1)(n-2)} \\ &= \frac{3(n+1)}{4} \dots\dots\dots (\text{答}) \end{aligned}$$

(別解)

$$\begin{aligned} E(X) &= \sum_{k=3}^n kP(k) \\ &= \sum_{k=3}^n \frac{3k(k-1)(k-2)}{n(n-1)(n-2)} \\ &= \sum_{k=1}^n \frac{3k(k-1)(k-2)}{n(n-1)(n-2)} \\ &= \frac{3}{n(n-1)(n-2)} \sum_{k=1}^n k(k-1)(k-2) \\ &= \frac{3}{n(n-1)(n-2)} \sum_{k=1}^n (k^3 - 3k^2 + 2k) \\ &= \frac{3}{n(n-1)(n-2)} \left\{ \frac{n^2(n+1)^2}{4} - 3 \cdot \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + 2 \cdot \frac{n(n+1)}{2} \right\} \\ &= \frac{3}{n(n-1)(n-2)} \cdot \frac{n(n+1)}{4} \{n(n+1) - 2(2n+1) + 4\} \\ &= \frac{3(n+1)}{4(n-1)(n-2)} (n^2 - 3n + 2) \\ &= \frac{3(n+1)}{4(n-1)(n-2)} (n-1)(n-2) \\ &= \frac{3(n+1)}{4} \dots\dots\dots (\text{答}) \end{aligned}$$